LES IDÉES STATISTIQUES FONDAMENTALES DANS LE CURRICULUM SCOLAIRE

Gail BURRILL[1] et Rolf BIEHLER[2]

TITLE

Fundamental statistics ideas in the school curriculum

RÉSUMÉ

Cet article prolonge le travail de Burrill & Biehler (2011), qui s'intéresse aux idées statistiques qui semblent fondamentales pour comprendre et être capable d'utiliser la pensée et le raisonnement statistiques dans le lieu de travail, dans la vie personnelle et en tant que citoyen. Le document met en évidence le lien entre ces idées fondamentales et le curriculum et fournit des recommandations pour les enseigner. Le document se termine par quelques suggestions générales pour soutenir l'apprentissage des élèves.

Mots-clés : *idées statistiques fondamentales, curriculum scolaire.*

ABSTRACT

This paper extends the work of Burrill & Biehler (2011), which considered statistical ideas that seem to be fundamental for understanding and being able to use statistical thinking and reasoning in the workplace, in personal lives and as citizens. The paper highlights the relationship of these fundamental ideas to the curriculum and recommendations for teaching them. The paper finishes with some general suggestions for supporting student learning.

Keywords: *fundamental statistical ideas, school curriculum.*

1 Introduction

Les enseignants sont en général d'accord sur la nécessité pour les élèves de devenir compétents dans l'utilisation et l'interprétation des données en tant que citoyen et sur la nécessité de raisonner statistiquement et de donner du sens à des décisions personnelles, que ce soit sur le lieu de travail ou pour l'étude d'autres disciplines (Franklin *et al.*, 2007). De nombreux pays ont des documents tels que *Common Core State Standards* aux U.S. (CCSSO & NGA, 2010), *New Zealand Mathematics and Statistics Curriculum* en Nouvelle Zélande (New Zealand Ministry of Education, 2006), et les *National Standards for Mathematics in Grades 5-10* en Allemagne (KMK, 2004). Ces documents fournissent des raisons convaincantes sur l'importance de la statistique comme discipline scolaire et détaillent le contenu que devraient avoir les curricula scolaires.

En général, cependant, il existe une grande différence dans les approches du curriculum statistique des différents pays (Newton, Dietiker & Horvath, 2011 ; Opolot & Opyene, 2011 ; Reston & Bersales, 2011). Cet article est construit sur le développement d'un ensemble d'idées fondamentales en statistique qui devraient être enseignées en classes de

[1] Michigan State University, United States, burrill@msu.edu
[2] University of Paderborn, Germany, biehler@math.upb.de

mathématiques et que chaque élève devrait connaître lorsqu'il ou elle quitte l'école secondaire, idées décrites dans *Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers* (Burrill & Biehler, 2011). Cet article résume brièvement des arguments selon lesquels les curricula scolaires devraient insister sur le développement de la compréhension de ces idées fondamentales. On y affirme que les personnes en charge des programmes devraient prendre en considération les recommandations formulées par les chercheurs en didactique de la statistique concernant la façon dont le programme pourrait développer ces idées.

Les justifications pour expliquer pourquoi il est important d'identifier des idées fondamentales et comment commencer à les penser sont décrites dans la section suivante.

2 Le besoin d'idées fondamentales en statistique

Des curricula cohérents et bien construits sont nécessaires pour que les élèves développent la compréhension d'idées importantes. Sans une conception soignée, les élèves sont conduits à faire l'expérience d'un programme fragmenté qui manque de coordination et de cohérence dans le temps et dans les sujets étudiés, qui répètent inutilement le même contenu et peuvent contenir des lacunes dans le développement de concepts centraux (Schwartz *et al.*, 2008). Cela est encore plus critique pour le cours de statistique, qui est souvent enseigné par quelqu'un ayant une formation minimale à la fois aux contenus statistiques et à l'enseignement de la statistique (Batanero *et al.*, 2011). Si le programme n'est pas soigneusement aménagé, les élèves peuvent revoir l'analyse des données univariées à plusieurs reprises et peuvent n'apprendre les probabilités que dans le cadre de formules mathématiques non connectées à l'analyse de données statistiques. Ils ne font jamais l'expérience de l'inférence, car elle est considérée comme techniquement trop compliquée. En revanche, un ensemble bien pensé d'idées fondamentales en statistique peut servir de base à la conception d'un programme cohérent de statistique, qu'il commence à l'école primaire ou secondaire. Les idées fondamentales liées à l'inférence, par exemple, peuvent être enseignées de façon informelle dans les classes précédentes et peuvent être revues et affinées dans les étapes ultérieures ; c'est ainsi que Bruner propose de revoir des notions scientifiques fondamentales au sein d'un programme en spirale (Bruner, 1960).

Comment des idées fondamentales pour le développement d'une compréhension de la statistique peuvent-elles être identifiées ? Réfléchir sur plusieurs points de vue différents permet de mieux cerner ce que pourraient être des concepts fondamentaux. Wild and Pfannkuch (1999) offre un cadre pour une pensée statistique experte à quatre dimensions : le cycle d'enquête, le cycle de questionnements, les types de pensée et les dispositions. Les types de pensée spécifiques à la statistique sont la reconnaissance de la nécessité de données, la transnumération (changement de représentations des données pour accroître la compréhension), le raisonnement avec des modèles statistiques, la prise en compte de la variation et l'intégration de la statistique et du contexte. Ce cadre n'avait pas pour but d'illustrer comment les concepts se développent au cours des niveaux d'étude.

Alors que la variation est identifiée comme l'une des composantes de la pensée statistique dans le cadre de Wild and Pfannkuch, la variabilité est centrale dans le *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics* (GAISE) *K-12 Report,* qui voit la statistique comme un *processus* pour la prise en compte de la variabilité des données (Franklin *et al.*, 2007). GAISE distingue la statistique des mathématiques par :

1) le rôle central de la variabilité aléatoire ou de la variabilité dans les données en statistique, par opposition à la nature déterministe des mathématiques ;
2) le rôle du contexte qui, en statistique, donne du sens, mais, en mathématiques, donne des occasions d'applications.

Ce dernier rôle du contexte est souvent vrai dans les mathématiques scolaires ; cependant, les mathématiques appliquées et la modélisation mathématique sont plus proches de la statistique. Les mathématiciens affirment également que les mathématiques en elles-mêmes ne sont pas déterministes ; en particulier, les mathématiques peuvent être utilisées pour modéliser des phénomènes incertains. Cependant, les mathématiques scolaires sont présentées souvent de façon déterministe.

Le cadre de GAISE est composé de deux dimensions :

1) le processus de résolution de problèmes qui inclut le questionnement, l'échantillonnage aléatoire, les plans d'expériences, la comparaison de la variabilité entre individus et groupes, l'association de deux variables, la généralisation d'un échantillon à la population et la distinction entre études observationnelles et études expérimentales ;
2) trois niveaux de développement, non liés à des niveaux scolaires mais reflétant une sophistication croissante dans la capacité à utiliser des concepts statistiques.

La nature et la focalisation sur la variabilité sont dépeintes de manière de plus en plus complexe au cours de chacun des niveaux.

Une troisième perspective est celle de la littératie statistique, où les apprenants sont considérés comme des utilisateurs au lieu d'être des producteurs de données et de résultats statistiques.

Watson (1997) suggère une hiérarchie, à trois niveaux, des capacités constitutives de la littératie statistique :

1) comprendre la terminologie statistique de base ;
2) replacer la terminologie statistique dans son contexte ;
3) questionner les allégations faites sans justification statistique appropriée ;

Gal (2002) a quant à lui identifié cinq composantes nécessaires pour la littératie statistique :

1) savoir pourquoi les données sont nécessaires et comment elles peuvent être produites ;
2) être familiarisé avec la terminologie de base et les idées de la statistique descriptive ;
3) être familiarisé avec la terminologie de base et les idées des graphiques et tableaux ;
4) comprendre les notions de base des probabilités ;
5) savoir comment des conclusions statistiques ou des inférences sont obtenues.

Une quatrième perspective est apportée dans le contexte de l'enseignement stochastique, qui est décrit en Allemagne comme un sous-domaine des mathématiques comprenant les probabilités et la statistique. Heitele (1975) a suggéré des idées fondamentales pour l'enseignement stochastique, incluant les probabilités, l'espace probabilisé, les règles d'addition et de produit des probabilités, l'indépendance et les probabilités composées et conditionnelles, l'équiprobabilité, la combinatoire, les variables aléatoires et les distributions de probabilité, la simulation, l'échantillonnage, et la loi des grands nombres. Elles ont été choisies comme fondamentales parce que, entre autres choses :

1) elles sont puissantes pour la structuration de la théorie des probabilités et de la statistique, qui est appelée « stochastique » en Allemagne et dans quelques autres pays européens et considérée comme une branche des mathématiques appliquées ;
2) elles peuvent être enseignées à différents niveaux dans le curriculum, de l'école primaire jusqu'à l'université, où les élèves peuvent progresser dans la formalisation et l'exhaustivité ;
3) elles apparaissent dans la plupart des situations aléatoires.

Une différence majeure entre les trois premières perspectives et la perspective « stochastique » résulte en ce que Heitele décrit les concepts et non les processus de pensée.

La perspective « stochastique » européenne assigne un rôle plus important aux probabilités dans la statistique que d'autres perspectives, en particulier anglo-saxonnes, ne semblent le faire. Récemment, cependant, le rôle des probabilités a été reconsidéré positivement par plusieurs auteurs (Konold & Kazak, 2008). Un numéro spécial de ZDM – The International Journal on Mathematics Education – a été consacré à ce sujet ; cf. Biehler & Pratt (2012) pour une introduction à ce numéro.

Sur la base de ces perspectives – un cadre pluri-dimensionnel décrivant les cycles de raisonnement, les lignes directrices fondées sur une vision de la statistique comme un processus pour la prise en compte de la variabilité, la littératie statistique mettant l'accent sur l'utilisateur de la statistique, et la dimension stochastique insistant sur les liens entre statistique et probabilités – la section suivante propose un ensemble d'idées fondamentales en statistique.

3 Les idées fondamentales en statistique

Quelles caractéristiques sont importantes pour décliner une liste d'idées fondamentales ? Heymann (2003) a affirmé que les « idées fondamentales » concernant les mathématiques comme discipline scolaire devraient :

1) permettre à la relation entre culture mathématique et culture non mathématique de devenir perceptible ;
2) exprimer les traits universels de façon compréhensible pour les élèves ;
3) décrire les idées qui donnent du sens aux sujets mathématiques et qui sont davantage que des concepts mathématiques de base.

En adaptant et étendant les critères de Heymann sur les idées fondamentales en mathématiques et les idées fondamentales de Heitele en stochastique, les auteurs de cet article suggèrent que les concepts fondamentaux en statistique devraient :

1) partager certains points communs des différentes perceptions ou manières de penser l'enseignement de la statistique ;
2) lier la statistique à d'autres expériences du monde et à certains aspects de la culture ;
3) illustrer la structure de la discipline en identifiant les caractéristiques spécifiques et les traits importants de la discipline ;

4) avoir la capacité à pouvoir être enseignés à différents niveaux de formalisation au cours du temps.

Ainsi, les concepts suivants sont proposés comme idées fondamentales en statistique :

1) *les données* : y compris les différents types de données, les modes de collecte des données, les mesures, en tenant compte du fait que les données sont des nombres dans un contexte ;
2) *la variation* : l'identification et la mesure de la variabilité pour prédire, expliquer et contrôler. Le terme « variabilité » est utilisé pour le phénomène général de changement et le terme de « variation » pour décrire l'effet global du changement ;
3) *les distributions* : y compris les notions d'indices de tendance centrale[3] et de dispersion qui sont les fondements du raisonnement sur les variables statistiques à partir des distributions empiriques, les variables aléatoires et les distributions théoriques ;
4) *les représentations* : représentations graphiques ou autres représentations qui révèlent l'histoire dans les données y compris la notion de transnumération ;
5) *les associations et la modélisation des liens entre deux variables* : nature des relations entre variables statistiques selon qu'elles sont catégorielles ou numériques, y compris la régression pour la modélisation d'associations statistiques ;
6) *les modèles probabilistes pour les processus de génération de données* : modélisation de relations structurelles hypothétiques générées à partir de la théorie, simulation ou approximations d'un grand ensemble de données, quantification de la variabilité dans les données en incluant la stabilité à long terme ;
7) *l'échantillonnage et l'inférence* : la relation entre échantillons et population et la façon dont les données doivent être collectées pour tirer des conclusions avec un certain degré de certitude.

En général, les enseignants transmettent le contenu aux élèves à travers la mise en œuvre d'un curriculum spécifique, souvent prescrit dans des référentiels, des manuels scolaires ou des lignes directrices curriculaires détaillées. La section suivante examine la relation entre les curricula scolaires et les idées fondamentales.

4 Les idées fondamentales en statistique et le curriculum

Alors que les référentiels des mathématiques scolaires et de la statistique diffèrent dans leurs caractéristiques essentielles : rôle du contexte, méthodes de raisonnement, précision, rôle des données et collecte des données (Franklin *et al.*, 2007 ; Gattuso, 2008 ; Rossman, Chance & Medina, 2006 ; Scheaffer, 2006), la statistique est souvent enseignée dans les cours de mathématiques. La discussion ci-dessous suggère quelques moyens par lesquels les programmes scolaires de mathématiques peuvent être utilisés pour faire des ponts entre les idées fondamentales en matière de statistique, en particulier en ce qui concerne la variation, l'association et la modélisation, et le développement informel des notions d'inférence. La discussion fait ressortir aussi quelques concepts qu'il est nécessaire de développer dans un

[3] Les indices de *tendance centrale* (mode, médiane, moyenne…) sont souvent nommés indices de *position* en France, alors que dans d'autres pays les indices de *position* sont les quantiles (quartiles, déciles…) (Ndt).

espace qui leur est propre. De plus, la discussion fournit quelques suggestions sur la façon dont le curriculum pourrait répondre à l'affirmation de Konold's (1995) selon laquelle, sauf attention accordée spécifiquement à la compréhension conceptuelle des élèves et à leur possibles conceptions erronées, la plupart des étudiants continuent à croire à leurs conceptions erronées après leur formation ; ce point de vue est partagé par d'autres chercheurs (Carpenter, Fennema, & Franke, 1996 ; Garfield, 1995 ; Houssart, 2002 ; Smith *et al.*, 1993 ; Sullivan, Mousley, & Zevenbergen, 2006).

4.1 Les données

Cobb (1992) suggère que le curriculum commence avec les méthodes d'exploration et de description des données, en revenant ensuite à la production des données puis à l'inférence formelle. Il fait valoir que l'esprit de l'Analyse Exploratoire des Données (*Exploratory Data Analysis, EDA*) (Tukey, 1972, 1977) suppose le nécessaire dialogue entre données et modèles d'inférence qui autorise à critiquer et raffiner des modèles spécifiques à partir des données. Bien que l'exploration des données puisse être intégrée dans le curriculum dans l'étude des pourcentages et des fractions (c'est-à-dire, en utilisant les tables à double entrée pour résumer les résultats d'une enquête), en général, le développement des outils graphiques, tels que le diagramme tige et feuilles, le diagramme en boîtes et l'histogramme, ne rentre pas dans le programme traditionnel de mathématiques et on doit lui trouver de la place dans le curriculum. L'étude des mesures de tendance centrale et de dispersion, cependant, peut facilement être liée au travail avec des expressions et des équations, dans le développement de formules spécifiques. Malheureusement, le rôle fondamental des mesures de tendance centrale et de dispersion pour la description des distributions risque d'être négligé, si l'attention est portée sur les aspects mathématiques et calculatoires de ces mesures.

Les données bivariées fournissent l'opportunité d'étendre le concept de fonction mathématique à un modèle de dépendance aléatoire ou de dépendance fonctionnelle qui inclut variation et déviation par rapport au modèle fonctionnel parfait. Intégrer des vues sur la dépendance fonctionnelle et la variation statistique peut être un réel défi (Noss, Pozzi, & Hoyles, 1999). Batanero, Godino et Estepa (1998) suggèrent que l'une des trois situations dans lesquelles juger de l'association est important est le diagramme de dispersion[4], les deux autres étant les tables de contingence et les comparaisons d'échantillons ; ils recommandent que l'association soit décrite en terme d'intensité variant de l'indépendance à la relation fonctionnelle. Si une association est identifiée entre deux ou plusieurs variables, des méthodes de régression peuvent être utilisées pour ajuster différents types de fonctions mathématiques afin de prévoir une des variables (variable dépendante ou à expliquer) en fonction de l'autre. L'adéquation au modèle mathématique dans une situation donnée peut apporter des incertitudes similaires à celles rencontrées en statistique.

L'analyse des données bivariées catégorielles (sexe et participation à l'athlétisme par exemple) pourrait être liée à la notion probabiliste d'indépendance et aux probabilités conditionnelles et les associations possibles pourraient être explorées. Ce sujet est très pertinent pour faire face aux usages et abus des nombres dans les médias (Gigerenzer, 2002 ; Krämer & Gigerenzer, 2005).

[4] Le *diagramme de dispersion* est aussi appelé en France *graphe plan*, *graphe X-Y* ou *graphe du nuage de points* (Ndt).

« Utiliser des données réelles » est un mantra exprimé par de nombreux enseignants en statistique (Cobb, 1991 ; Franklin *et al.*, 2007 ; Scheaffer, 1990). Trop souvent, cependant, des données simplistes et artificielles sont fournies dans les énoncés statistiques ; les élèves voient rarement les données en désordre rencontrées dans le monde réel. Un curriculum soigneusement conçu veillera à ce que les élèves participent à la collecte des données, aux processus de mesure de la prise en compte des erreurs et à une attention à la mesure des attributs catégoriques. Les données devraient être utilisées pour développer les notions de probabilités conditionnelles, éventuellement à partir de tables à double entrée.

4.2 La variation

La variation a une nature différente en mathématiques et en statistique. Les mathématiques sont généralement enseignées à l'école comme étant exactes et précises. La statistique porte sur « le bruit », c'est-à-dire, sur la façon de mesurer et de contrôler la variabilité. Les données réelles en statistique sont contextuelles ; elles contiennent incertitudes et erreurs, alors que les données dans de nombreux cours de mathématiques sont souvent supposées s'adapter parfaitement à un modèle mathématique. L'enseignement des fonctions, en particulier, peut être conçu pour soutenir plutôt que saper des concepts statistiques, par exemple en faisant reconnaître et quantifier la « dispersion » autour d'une fonction utilisée pour modéliser la relation entre deux variables.

De nombreux chercheurs suggèrent de développer la variabilité et la forme en parallèle (e.g., Bakker, 2004) plutôt que trop insister sur les mesures de tendance centrale au détriment de la variabilité (e.g., Shaughnessy, 1997). Garfield, delMas et Chance (2007) suggèrent une trajectoire d'apprentissage hypothétique pour raisonner sur les variations :

1) comprendre que les données varient en utilisant des contextes familiers aux élèves (par exemple, parler sur téléphones portables, jouer à des jeux vidéo) ;
2) étudier pourquoi la variation se produit ;
3) introduire des représentations graphiques ;
4) se concentrer à la fois sur la dispersion et la valeur autour de laquelle la majorité des données est concentrée ;
5) examiner des mesures de tendance centrale et la façon dont les mesures de variabilité sont obtenues comme des déviations moyennes par rapport aux mesures de tendance centrale.

Dans cette trajectoire, le fait de fournir aux élèves des opportunités de décrire la variation, en liant les descriptions générales des extrêmes et des valeurs centrales aux déviations par rapport à une valeur typique, qui peut ou non être une moyenne ou une médiane, peut les aider à reconnaître que la variation doit être considérée par rapport à un certain point de référence et ne pas se contenter de dire « il y a beaucoup de variation » (Reading & Shaughnessy, 2004). D'autres activités pourraient permettre aux élèves de faire des comparaisons entre la forme et la variabilité relative, par exemple, d'examiner les histogrammes qui ont des petites et des grandes variations et de considérer comment les distributions avec même moyenne et médiane peuvent différer en variabilité.

Plusieurs chercheurs suggèrent que le curriculum soit explicite sur le concept de variabilité et fournisse des occasions pour comparer la variabilité dans des données présentées dans des graphiques différents (par exemple, diagramme en boîte, diagramme tige et feuilles, histogrammes) ainsi que parmi des sous-groupes (comparer mâle et femelle ou droitier et gaucher pour une certaine variable) (Biehler, 2007). Au fur et à mesure que les élèves dépassent les statistiques descriptives, devenir explicite inclut de clarifier la nature de la variabilité des données dans les différents contextes statistiques, telle que :

1) valeurs observées pour un ensemble de données ;
2) résultats d'expériences aléatoires ;
3) échantillonnage (Shaughnessy, Watson, Moritz, & Reading, 1999 ; Gould, 2004).

4.3 Les distributions

Les distributions sont développées dans le contexte de l'enseignement de la statistique mais n'apparaissent généralement pas dans le curriculum de mathématiques. La distribution est utilisée pour se référer à l'ensemble des données par opposition aux données individuelles, bien que les élèves aient souvent des difficultés à passer des résultats individuels au général. Les élèves comprennent mal le rôle des fréquences relatives en les confondant souvent avec les valeurs des données (Cooper & Shore, 2008 ; Friel, Curcio, & Bright, 2001). Reading and Reid (2007) recommandent que le curriculum commence avec des notions informelles de variation et les étendent pour raisonner sur la distribution. Parce que le langage mathématique n'est pas d'une grande aide pour décrire les distributions (Biehler, 1997), une approche consiste à utiliser un langage qui fait sens pour les élèves comme l'expérience « d'échantillons de tailles croissantes » de Bakker (2004) qui engage les élèves de niveau collège à raisonner sur des distributions asymétriques. Wild (2006) décrit la difficulté, dans le concept de distribution, qui peut être liée aux distributions théoriques (probabilités) et aux distributions empiriques (données).

Garfield et Ben-Zvi (2007) recommandent d'utiliser le langage de forme, centre et dispersion et les interrelations entre ces concepts pour comprendre les distributions et suggèrent explicitement de revoir ces idées dans différents contextes tout au long du curriculum pour aider les élèves à reconnaître comment elles forment une plate-forme fondamentale pour la connaissance statistique. Le curriculum devrait délibérément introduire des notions d'échantillons et de processus d'échantillonnage pour permettre aux élèves de faire la distinction entre la distribution d'une population, la distribution d'un échantillon de cette population et la distribution d'échantillonnage d'une statistique d'échantillon (Wild, 2006).

4.4 Les représentations

Les représentations graphiques sont essentielles pour comprendre et analyser les données, mais, en mathématiques, il est typique de « croquer des nombres » avant de regarder le graphique. Cela peut conduire à penser que les graphiques sont des illustrations plutôt que des outils de raisonnement pour apprendre quelque chose à propos d'un ensemble de données ou obtenir de nouvelles informations sur un problème ou un contexte particuliers (Konold & Pollatsek, 2002 ; Wild & Pfannkuch, 1999). Friel, Curcio & Bright (2001) fournissent une revue de la littérature sur comment donner du sens aux graphiques.

Alors que les élèves doivent apprendre à construire des graphiques, l'accent devrait être mis sur ce que le graphique apporte à la question à laquelle on s'intéresse, en remarquant des configurations ou des observations inattendues et en générant des hypothèses (Reading &

Reid, 2006 ; Watson, 2005). Bakker (2004) propose deux conjectures à partir de son travail : les élèves réussissent mieux lorsqu'ils argumentent contre certaines formes choisies comme bonnes représentations d'un ensemble de données, car c'est plus sûr que d'avoir à choisir la forme « correcte », et l'absence de définitions formelles rend plus facile la participation au travail des élèves faibles.

En raison de l'importance des graphiques, le curriculum doit être explicite concernant de mauvaises conceptions possibles dans le développement de représentations diverses. Les élèves doivent apprendre à distinguer les diagrammes en barres et les histogrammes, en reconnaissant que les barres dans un histogramme ont une densité alors que les barres dans un diagramme en barres n'en ont pas. Des stratégies pour affronter ou surmonter ces mauvaises conceptions liées aux diagrammes en boîtes incluent l'utilisation des diagrammes en boîtes liés dynamiquement aux diagrammes en points (dot-plots) des mêmes données. En manipulant les diagrammes en points, les élèves peuvent chercher la fonction de densité des composantes du diagramme en boîtes (Bakker, Biehler, & Konold, 2005). Biehler (2001) a recommandé d'utiliser des contextes qui se prêtent à l'interprétation centre-étendue en considérant à quel point les valeurs les plus basses et les plus hautes diffèrent de la médiane avant de développer l'écart interquartile et d'employer des exemples prototypiques et des concepts.

4.5 Les associations et la modélisation des relations entre deux variables

L'utilisation de la modélisation mathématique comme un pont entre les mathématiques et la statistique, en particulier pour l'analyse de données quantitatives bivariées, peut délibérément être exploitée dans le curriculum mathématique. Les élèves peuvent commencer avec la collecte des données en comparant des modèles mathématiques (exprimés par des fonctions) aux données empiriques, en utilisant une loupe statistique, par exemple, pour vérifier les résidus ou pour réfléchir sur la façon dont le contexte peut être lié au choix du modèle. Le curriculum devrait aider les élèves à distinguer le graphe d'une fonction d'un modèle statistique et devrait les rendre capables de reconnaître que les variables explicatives et à expliquer ne sont pas interchangeables alors qu'il y a d'autres cas où une approche plus symétrique, en considérant la co-variation, est la bonne voie.

Le curriculum devrait aider les élèves à confronter les mauvaises conceptions sur le coefficient de corrélation, par exemple, la confusion entre corrélation et causalité. Fournir des environnements d'apprentissage basés sur la simulation peut réduire les mauvaises conceptions telles qu'une forte valeur de « r » indiquant la qualité de l'ajustement (Liu, 2010).

Le curriculum statistique devrait fournir des pratiques dans l'analyse des données de tables de contingence pour l'étude d'associations possibles, tables de contingence qui ne font généralement pas partie du programme de mathématiques. Pour aider les élèves à distinguer entre fréquences absolues et relatives (entre effectifs et fréquences), Batanero, Godino, & Estepa (1998) trouvent utile de constamment attirer l'attention sur la différence dans le temps.

4.6 Les modèles probabilistes pour le processus de génération de données

Des modèles probabilistes permettent de produire des données « obtenues par le hasard » selon la terminologie de Hacking (1965). Ils peuvent être utilisés pour modéliser des échantillons aléatoires tirés des données d'une population et pour illustrer la variation d'échantillon à échantillon. Le curriculum devrait introduire les modèles probabilistes comme modèles pour prévoir des données réelles à partir d'expériences aléatoires et pour chercher comment des données empiriques peuvent différer aléatoirement de la distribution théorique même si cette distribution est supposée être vraie.

Pour favoriser la compréhension de ces modèles, le curriculum devrait contenir de larges expériences phénoménologiques, dans lesquelles la simulaiton, assistée par un ordinateur, peut jouer un rôle proéminent (Biehler, Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2013). De telles expériences peuvent permettre aux élèves d'éviter l'extrapolation excessive du théorème central limite, de développer une profonde compréhension des distributions des variables aléatoires discrètes et de reconnaître que la courbe normale est une distribution théorique composée d'une famille de distributions ayant moyenne et écart-type comme paramètres. Les élèves doivent prendre soin de vérifier les hypothèses, comme l'indépendance ou l'équiprobabilité, qui ne sont pas toujours satisfaites et sont souvent considérées comme étant données.

4.7 Échantillonnage et inférence

L'inférence statistique consiste à raisonner à partir d'un échantillon aléatoire sur une population, à quantifier une certaine mesure de certitude quant au processus utilisé, mesure qui repose sur la comparaison entre un résultat observé et le résultat qui serait attendu sous des conditions données. Comme Freudenthal (1974) l'a fait remarquer en ce qui concerne l'échantillonnage : ce qui est important pour la statistique est la variation d'échantillon à échantillon et comment cette variation décroît au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Une compréhension intuitive de cette propriété peut empêcher les élèves de croire à une stabilité irréaliste des échantillons avec des « petites » tailles d'échantillons (Tversky & Kahnemann, 1971). Biehler & Prömmel (2010) ont conçu et développé du matériel pédagogique dans ce sens.

Une des plus grandes tensions entre les mathématiques et la statistique est liée à l'inférence et au mode de raisonnement. Les conclusions en mathématiques sont certaines, basées sur des définitions et des principes ; les conclusions en statistique ne sont jamais certaines. Le degré de certitude en statistique dépend de la façon dont les données ont été collectées et du rôle de l'aléatoire ; une conclusion mathématique est indépendante du contexte. Par exemple, l'approche mathématique du raisonnement proportionnel mine souvent l'approche statistique permettant de raisonner à partir d'échantillons. Les pourcentages en mathématiques sont souvent appliqués dans des contextes simples, où la référence est fixée et les unités sont claires et constantes. Des relevés statistiques soignés faits à partir de marges d'erreur et d'intervalles de confiance sont remplacés par des « inférences » simplistes de « l'échantillon » à « la population », en supposant une relation parfaite de proportionnalité. Ignorant l'incertitude et la variabilité, les résultats de l'échantillon sont présentés, dans beaucoup de rapports des médias, par des estimations ponctuelles plutôt que par des estimations par intervalle de confiance. Préparer les élèves à la pensée statistique exige que le programme fasse explicitement ces différences.

Commencer tôt avec de nombreuses expériences informelles reliées à l'inférence peut répondre à un certain nombre d'idées fausses des élèves au sujet de l'inférence statistique (Rubin, Hammerman, & Konold, 2006). Les élèves confondent échantillons et populations, ignorent l'effet de la taille de l'échantillon sur la variance de la moyenne d'échantillonnage (Chance, delMas, & Garfield, 2004), croient que tout échantillon doit être très proche de la population quelle que soit sa taille (et, par conséquent, extrapolent la loi des grands nombres aux petits échantillons) (Tversky & Kahneman, 1971), confondent les intervalles de confiance et les niveaux de confiance et sont incapables d'exprimer ce qu'un intervalle de confiance représente, mélangent l'écart-type avec l'erreur standard[5] (Rossman & Chance, 2004) et ont des difficultés avec les tests d'hypothèses (Castro Sotos *et al.*, 2007 ; Birnbaum, 1982 ; Falk, 1986).

Une attention particulière au langage et au symbolisme est essentielle lorsque les élèves commencent à développer des techniques d'inférence. Pour développer le raisonnement inférentiel informel des élèves, des tâches doivent les impliquer dans des déclarations ou des prédictions sur la population à partir des échantillons, sans procédure formelle, et dans la présentation de preuves pour les soutenir (Weinburg, Wiesner, & Pfaff, 2010). Utiliser des activités de simulation pour faire et tester des conjectures sur des distributions empiriques d'échantillonnage de populations différentes et avoir l'occasion d'en discuter avec les autres peut aider les élèves à surmonter certaines difficultés liées à la compréhension et à la capacité d'utilisation de l'inférence statistique. Plus récemment, plusieurs approches impliquant l'utilisation intensive d'outils technologiques ont été développées selon ces directions (Garfield, delMas, & Zieffler, 2012 ; Pfannkuch, Wild, & Parsonage, 2012 ; Wild & Pfannkuch, Regan, & Horton, 2011).

4.8 Recommandations générales

Voici quelques recommandations générales relatives à l'encadrement d'un curriculum statistique :

1) Activer explicitement et s'appuyer sur les connaissances antérieures (Schwartz, Sears & Chang, 2007). Cela inclut de fournir aux élèves des occasions de réfléchir sur les raisons pour lesquelles leurs croyances peuvent être incorrectes ou partiellement correctes (delMas *et al.*, 2007 ; Smith *et al.*, 1993).
2) Utiliser les outils technologiques avec des séquences d'activités soigneusement conçues pour développer des concepts importants (e.g., Ben-Zvi, 2000 ; Biehler, Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2013 ; Cobb, McClain, & Gravemeijer, 2003 ; Pfannkuch, 2006). Par exemple, des simulations soigneusement structurées peuvent jouer un rôle important dans le renforcement de la capacité des élèves à étudier les processus aléatoires et les concepts statistiques (Mills, 2004 ; Lane & Peres, 2006 ; Lane & Tang, 2000).
3) Faire participer les élèves au travail collaboratif et sur des projets et des cas qui présentent l'analyse statistique comme un processus d'enquête avec des applications pratiques (voir, e.g., Bell 2001, Cochran 2010).
4) Fournir une rétroaction (Lovett, 2001). Par exemple, Rossman et Chance (2004) offrent une manière de penser à propos d'items d'évaluation formative informels, axés sur la formation d'élèves qui identifient et corrigent les erreurs communes dans des exercices « What Went Wrong? » (en français, « Quel est le problème ici ? ») dans le but d'aider les élèves à anticiper les écueils les plus courants qu'ils doivent éviter.

[5] L'erreur standard est l'écart-type d'une moyenne d'échantillonnage (Ndt).

5 Les objectifs de traitement de l'enseignement des idées fondamentales

Des lignes directrices ou des références curriculaires dans de nombreux pays incluent des spécifications sur la façon dont le contenu doit être appris. Par exemple, les processus centraux de résolution de problèmes de Singapour comprennent le raisonnement, la communication et les connexions, les capacités de réflexion et d'heuristique, l'application et la modélisation (MoE, 2006). L'Australie inclut des références pour quatre compétences (compréhension, aisance, résolution de problème et raisonnement) basées sur les compétences décrites dans *Adding It Up* (Kilpatrick *et al.*, 2001). The *United States Common Core State Standards* a des références de pratiques mathématiques qui décrivent huit « habitudes de pensée » que les élèves doivent avoir quand ils font des mathématiques. Au Brésil, des idées telles que « apprendre à apprendre », « promouvoir l'indépendance », « apprendre à résoudre des problèmes » sont incorporées dans les nouveaux curricula (BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental, 1997). Au Pérou, l'accent est mis principalement sur les processus de résolution de problèmes, le raisonnement et la preuve, et la communication mathématique (Peru Ministry of Education, 2009). En Allemagne, KMK (2004) distingue les objectifs de traitement suivants : résolution de problèmes, modélisation, utilisation de représentations mathématiques, utilisation d'outils symboliques et formels, communication, argumentation mathématique.

Quelles habitudes statistiques de pensée doivent développer les étudiants à mesure qu'ils grandissent dans la compréhension des concepts fondamentaux de statistique ? S'appuyant sur les travaux de Moore (1997), Chance (2002), Franklin *et al.* (2007), and Shaughnessy, Chance et Kranondonk (2009), on peut s'efforcer d'éduquer les élèves à :

- poser de bonnes questions : que puis-je demander qui fournira des données utiles pour répondre à ma question ?
- faire attention au contexte : est-ce que le contexte affecte la façon dont je pense à ce problème ?
- gérer la variabilité : comment puis-je expliquer, contrôler et quantifier la variabilité ?
- commencer les études par des graphiques : que voit-on ? est-ce que des tendances sont visibles et, si oui, comment puis-je les modéliser ? est-ce qu'une autre représentation serait utile ?
- comparer les comportements observé et attendu : est-ce que ce résultat est typique ? aurait-il pu arriver par hasard ?
- être ouverts à l'enquête : qu'est-ce que je me demande ? quoi d'autre pourrait expliquer cette observation ? quelles nouvelles questions puis-je demander ?
- comprendre le processus statistique dans son ensemble : le processus de collecte des données informe-t-il sur des conclusions possibles ? quelles suggestions alternatives pourraient émerger d'une analyse minutieuse des données ?

Un curriculum qui englobe les idées fondamentales en statistique dans le contexte d'habitudes de pensée statistique principales peut fournir aux enseignants les ressources dont ils ont besoin pour aider les élèves à obtenir les fondements statistiques utiles pour toutes les facettes de leur vie future et leurs styles de vie.

6 Quelques remarques en conclusion

Comme mentionné précédemment, un curriculum cohérent et bien pensé est nécessaire pour permettre aux élèves de développer les connaissances statistiques et les modes de raisonnement essentiels pour devenir un citoyen productif dans toute société. Des perspectives sur ce qui contribue à cette connaissance et ces modes de raisonnement comprennent un cadre de pensée statistique (Wild & Pfannkuch, 1999), mettant l'accent sur les processus statistiques liés à des niveaux de sophistication croissants dans l'utilisation des concepts statistiques (Franklin *et al.*, 2007), les composantes identifiées comme centrales dans la littératie statistique (Gal, 2002) et les concepts stochastiques réunissant probabilités et statistique (Heitele, 1975). Construites à partir de ces perspectives, sept idées fondamentales apparaissent comme centrales dans le développement d'un curriculum statistique cohérent : les données, la variation, les distributions, les représentations, les associations, les modèles probabilistes, l'échantillonnage et l'inférence. Les chercheurs en didactique statistique ont fourni quelques indications sur la façon dont les programmes devraient aborder ces idées ainsi que des sources potentielles identifiées d'incompréhension et de malentendus typiques.

Trop souvent, ce qui se passe dans la pratique n'est pas relié à la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage. Dans une enquête adressée à onze pays différents, l'équipe d'enquête sur recherche et curriculum ICME-12 trouve très peu de preuves de l'utilisation de la recherche dans la conception et la mise en œuvre des curricula de mathématiques dans ces pays (Burrill, Lappan & Gonulates, 2012). Le développement soigné de ces sept idées statistiques fondamentales à la lumière des perspectives qui y ont conduit, fournit l'occasion de garantir que les connexions soient faites entre la recherche et la pratique, engageant les élèves dans des trajectoires d'apprentissage productives qui les conduiront à être des praticiens en statistique compétents.

Références

[1] Bakker, A. (2004), Reasoning about shape as a pattern in variability, *Statistics Education Research Journal*, **3**(2), 64-83.

[2] Bakker, A., R. Biehler, and C. Konold (2005), Should young students learn about box plots? In G. Burrill and M. Camden (Eds.), *Curricular development in statistics education* (pp 166-173), International Association for Statistical Education 2004 Roundtable, International Statistical Institute, Voorburg, the Netherlands, https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/4.2_Bakker_etal.pdf

[3] Batanero, C., G. Burrill, and C. Reading (2011), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education*, A Joint ICMI/IASE Study, Springer, New York.

[4] Batanero, C., J. Godino, and A. Estepa (1998), Building the meaning of statistical association through data analysis activities. In A. Olivier, and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 221-236), University of Stellenbosch, Stellenbosch, South Africa.

[5] Bell, P. C. (2001), Teaching business statistics with Microsoft Excel, *INFORMS Trans. Ed.*, **1**(1), 18–26, http://ite.pubs.informs.org/

[6] Ben-Zvi, D. (2000), Toward understanding the role of technological tools in statistical learning, *MathematicalThinking and Learning*, **2**(1&2), 127–155.

[7] Biehler, R. (1997), Students' difficulties in practicing computer supported data analysis - Some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies. In J. Garfield & G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 169-190), International Statistical Institute, Voorburg, the Netherlands, www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/IASE/14.Biehler.pdf

[8] Biehler, R. (2001), Students' difficulties in practicing computer supported data analysis - Some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies. In C. Reading (Ed.), *Background readings for SRTL-2* (pp. 169-190), University of New England, Armidale, NSW, Australia.

[9] Biehler, R. (2007), Students' strategies of comparing distributions in an exploratory data analysis context, *Proceedings of 56th Session of the International Statistical Institute* [CD-ROM] (Lisbon), International Statistical Institute, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isi56/IPM37_Biehler.pdf

[10] Biehler, R. and A. Prömmel (2010), Developing students computer-supported simulation and modelling competencies by means of carefully designed working enviroments. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (Ljubljana, Slovenia), International Statistical Institute, Voorburg, The Netherlands, http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_8D3_BIEHLER.pdf

[11] Biehler, R. and D. Pratt (2012), Research on the reasoning, teaching and learning of probability and uncertainty, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, **44**(7), 819-823.

[12] Biehler, R., D. Ben-Zvi, A. Bakker, and K. Makar (2013), Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689), Springer, New York.

[13] Birnbaum, I. (1982), Interpreting statistical significance, *Teaching Statistics*, 4, 24–27.

[14] Brasil, Secretariade Educação Fundamental (1997), Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (National curriculum parameters: Mathematics), Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília.

[15] Bruner, J. S. (1960), *The process of education*, Harvard University Press, Cambridge.

[16] Burrill, G. and R. Biehler (2011), Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill and C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education - A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69), Springer, Dordrecht.

[17] Burrill, G., G. Lappan, and F. Gonulates (in press), Curriculum and the role of research: Report of the ICME 12 Survey Team. In S. Cho, H. Lew, and O. Kwon (Eds.), Proceedings of the Twelfth International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

[18] Carpenter, T., E. Fennema, and M. Franke (1996), Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction, *The Elementary School Journal*, **97**(1), 3-20.

[19] Casto Sotos, A., S. Vanhoof, W. Van den Noortgate, and P. Onghena (2007), Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education, *Educational Research Review*, 2, 98-113.

[20] CCSSO & NGA (2010), Council of Chief State School Officers (CCSSO) & National Governors Association (NGA), http://www.corestandards.org/Math

[21] Chance, B. (2002), Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment, *Journal of Statistics Education*, **10**(3), www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html

[22] Chance, B., D. Ben-Zvi, J. Garfield, and E. Medina (2007), The role of technology in improving student learning of statistics, *Technology Innovations in Statistics Education Journal*, **1**(1), http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2

[23] Chance, B., R. delMas, and J. Garfield (2004), Reasoning about sampling distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 295-323), Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

[24] Cobb, G. (1991), Teaching statistics: More data, less lecturing, *Amstat News*, December, 1-4.

[25] Cobb, G. (1992), Teaching statistics. In A. S. Lynn (Ed.), *Heading the call for change suggestions for curriculum action* (pp. 3-43), Mathematical Association of America, Washington DC.

[26] Cobb, P., K. McClain, and K. Gravemeijer (2003), Learning about statistical covariation, *Cognition and Instruction*, **21**(1), 1-78.

[27] Cochran, J. (2010), All of Britain must be stoned! An effective introductory probability case, *INFORMS Trans. Ed.*, **10**(2), 62-64, http://ite.pubs.informs.org/

[28] Council of Chief State School Officers (CCSSO) and (National Governor's Association (NGA) (2010), *Common Core State Standards for Mathematics.*

[29] Online: www.corestandards.org

[30] Cooper, L. and F. Shore (2008), Students' misconceptions in interpreting center and variability of data represented via histograms and stem-and-leaf plots, *Journal of Statistics Education*, **16**(2), www.amstat.org/publications/jse/v16n2/cooper.html

[31] delMas, R., J. Garfield, A. Ooms, and B. Chance (2007), Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics, *Statistics Education Research Journal*, **6**(2), 28-58, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ6(2)_delMas.pdf

[32] Falk, R. (1986), Misconceptions of statistical significance, *Journal of Structural Learninq*, 3, 83-96.

[33] Franklin, C., G. Kader, D. S. Mewborn, J. Moreno, R. Peck, M. Perry, and R. Scheaffer (2007), *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*, Alexandria, VA: American Statistical Association, www.amstat.org/education/gaise/

[34] Freudenthal, H. (1974), The crux of course design in probability, *Educational Studies in Mathematics*, 5, 261-277.

[35] Friel, S. N., F. R. Curcio, and G. W. Bright (2001), Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications, *Journal for Research in Mathematics Education*, **32**(2), 124-158.

[36] Gal, I. (2002), Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities, *International Statistical Review*, 70, 1-51.

[37] Garfield, J. (1995), How students learn statistics, *International Statistical Review*, 63, 25-34.

[38] Garfield, J. and D. Ben-Zvi (2007), How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics, *International Statistical Review*, **75**(3), 372-396.

[39] Garfield, J., R. delMas, and B. Chance (2007), Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. In M. Lovett & P. Shah (Eds.), *Thinking with Data* (pp. 117-148), Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.

[40] Garfield, J., R. delMas, and A. Zieffler (2012), Developing statistical modelers and thinkers in an introductory, tertiary-level statistics course, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, **44**(7), 883-898.

[41] Gattuso, L. (2008), Mathematics in a statistical context? In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (2008), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*, Monterrey, México: ICMI and IASE. [CD-ROM].

[42] Gigerenzer, G. (2002), *Calculated risk: How to know when numbers deceive you*, Simon & Schuster, New York.

[43] Gould, R. (2004), Variability: One statistician's view, *Statistical Education Research Journal*, **3**(2), 7-16, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(2)_Gould.pdf

[44] Hacking, I. (1965), *Logic of statistical inference*, Cambridge University Press, Cambridge.

[45] Heitele, D. (1975), An epistemological view on fundamental stochastic ideas, *Educational Studies in Mathematics*, **6**(2), 187-205.

[46] Heymann, H. (2003), *Why teach mathematics: A focus on general education*, Kluwer, Dordrecht.

[47] Houssart, J. (2002), Simplification and repetition of mathematical tasks: A recipe for success or failure?, *The Journal of Mathematical Behavior*, **21**(2), 191-202.

[48] Kilpatrick, J., J. Swafford, and B. Findell (Eds.) (2001), *Adding it up*, National Academy Press, Washington DC, www.nap.edu

[49] KMK Kultusministerkonferenz (2004), *Bildungsstandards im FachMathematikfür den mittleren Schulabschluss* (Educational standards for secondary school mathematics (grade 10)), Wolters Kluwer, München.

[50] Konold, C. (1995), Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics, *Journal of Statistics Education*, **3**(1), www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html

[51] Konold, C. and A. Pollatsek (2002), Data analysis as the search for signals in noisy processes, *Journal for Research in Mathematics Education*, **33**(4), 259-289.

[52] Konold, C. and S. Kazak (2008), Reconnecting data and chance, *Technology Innovations in Statistics Education*, **2**(1).

[53] Krämer, W. and G. Gigerenzer (2005), How to confuse with statistics or: the use and misuse of conditional probabilities, *Statistical Science*, **20**(3), 223-230.

[54] Lane, D. M. and S. C. Peres (2006), Interactive simulations in the teaching of statistics: omise and pitfalls. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Bahia, Brazil, International Statistical Institute and International Association for Statistical Education, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

[55] Lane, D.M. and Z. Tang (2000), Effectiveness of simulation training on transfer of statistical concepts, *Journal of Educational Computing Research*, **22**(4), 383-396.

[56] Liu, T. (2010), Developing simulation-based computer assisted learning to correct students' statistical misconceptions based on cognitive conflict theory, using "correlation" as an example, *Educational Technology & Society*, **13**(2), 180-192.

[57] Lovett, M. C. (2001), A collaborative convergence on studying reasoning processes: A case study in statistics. In. S. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress* (pp. 347-384), Erlbaum, Mahwah, NJ.

[58] Mills, J. D. (2004), Learning abstract statistics concepts using simulation, *Educational Research Quarterly*, **28**(4), 18-33.

[59] Ministry of Education Singapore (2006), *Mathematical syllabus primary*, Curriculum Planning and Development Division, Singapore.

[60] Ministry of Education (2009), *Diseño Curricular Nacional* (National Curricular Design), Ministry of Education, Lima, Peru.

[61] Moore, D. (1997), New pedagogy and new content: The case of statistics, *International Statistical Review*, 65, 123-165.

[62] New Zealand Ministry of Education (2006), *The New Zealand curriculum: Mathematics and statistics*, www.nzcurriculum.tki.org.nz/

[63] Newton, J., L. Dietiker, and A. Horvath (2011), Statistical education in the United States: statistical reasoning and the statistical process. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Hrsg.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 9-13), Springer, Dordrecht.

[64] Noss, R., S. Pozzi, and C. Hoyles (1999), Touching epistemologies: meanings of average and variation in nursing practice, *Educational Studies in Mathematics*, 40, 25-51.

[65] Opolot-Okurut, C. and P. Eluk (2011), Statistics school curricula in Uganda. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading, *Teaching statistics in school mathematics-*

Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study (pp. 15-19), Springer, New York.

[66] Pfannkuch, M. (2006), Informal inferential reasoning. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

[67] Pfannkuch, M, C. Wild, and R. Parsonage (2012), A conceptual pathway to confidence intervals, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, **44**(7), 899-911.

[68] Reading, C. and J. Reid (2006), An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective, *Statistical Education Research Journal*, **5**(2), 46-68, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ5(2)_reading_reid.pdf

[69] Reading, C. and J. Reid (2007), A critical step in students' reasoning about distribution: Moving from understanding to using for inference, *Proceedings of the 56th ISI session*, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isi56/IPM37_Reading.pdf

[70] Reading, C. and M. Shaughnessy (2004), Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226), Kluwer AcademicPublishers, Dordrecht, The Netherlands.

[71] Reston, E. and L. Bersales (2011), Reform efforts in training statistics teachers in the Philippines: Challenges and prospects. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading, *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 41-45), Springer, New York.

[72] Rossman, A. and B. Chance (2004), A data-oriented, active learning, post-calculus introduction to statistical concepts, methods, and theory. In G. Burrill, & M. Camden (Eds.), *Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable* (pp. 104-115), International Statistical Institute, Voorburg, the Netherlands, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/3.3_Rossman&Chance.pdf

[73] Rossman, A., B. Chance, and E. Medina (2006), Some key comparisons: statistics and mathematics, and why teachers should care. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance. Sixty-eighth NCTM yearbook* (pp. 323-334), National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA.

[74] Rossman, A. and B. Chance (2004), Anticipating and addressing student misconceptions. Paper presented at the *ARTIST Roundtable Conference on Assessment in Statistics*, Lawrence University.

[75] Rubin, A., J. Hammerman, and C. Konold (2006), Exploring informal inference with interactive visualization software. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

[76] Scheaffer, R. (2006), Statistics and mathematics: On making a happy marriage. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eighth NCTM yearbook* (pp. 309-321), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

[77] Shwartz, Y., A. Weizman, D. Fortus, J. Krajcik, and B. Reiser (2008), Middle school science curriculum: Coherence as a design principle. A paper presented at the *Annual Meeting of the National Association of Research in Science Teaching*, March, 2008, Baltimore.

[78] Shaughnessy, J. M. (1997), Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in mathematics education Proceedings of the 20th annual meetings of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6-22), MERGA, Rotorua, New Zealand.

[79] Shaughnessy, J. M., J. Watson, J. Moritz, and C. Reading (1999), School mathematics students' acknowledgment of statistical variation: There's more to life than centers. Paper presented at the *Research Pre-session of the 77th Annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics*, San Francisco, CA.

[80] Shaughnessy, J. M., B. Chance, and H. Kranondonk (2009), *Focus on high school mathematics: Reasoning and sense making in statistics and probability*, The National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA.

[81] Scheaffer, R. (1990), The ASA-NCTM quantitative literacy project: An overview. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Congress on Teaching Statistics*, Dunedin, New Zealand: International Statistical Institute, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

[82] Schwartz, D. L., D. Sears, and J. Chang (2007), Reconsidering prior knowledge. In M. C. Lovett & P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp. 319-344), Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, http://aaalab.stanford.edu/papers/Schwartz_Reconsidering_Prior_K.pdf

[83] Smith, J., III, A. diSessa, and J. Roschelle (1993), Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition, *The Journal of the Learning Sciences*, **3**(2), 115-163.

[84] Sullivan, P., J. Mousley, and R. Zevenbergen (2006), Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms, *International Journal of Science and Mathematics Education*, **4**(1), 117-143.

[85] Tukey, J. W. (1972), Data analysis, computation and mathematics, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30, 51-65.

[86] Tukey, J. W. (1977), *Exploratory data analysis*, Addison-Wesley, Reading.

[87] Tversky, A. and D. Kahneman (1971), Belief in the law of small numbers, *Psychological Bulletin*, 76, 105-110.

[88] Watson, J. M. (1997), Assessing statistical literacy using the media. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp.107-121), IOS Press and International Statistical Institute, Amsterdam.

[89] Watson, J. (2005), Developing an awareness of distribution. In K. Makar (Ed.), *Reasoning about distribution: A collection of research studies. Proceedings of the Fourth International Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-4)*, University of Auckland, New Zealand, 2-7 July. Brisbane: University of Queensland [CD-ROM].

[90] Weinberg, A., E. Wiesner, and T. J. Pfaff (2010), Using informal inferential reasoning to develop formal concepts: Analyzing an activity, *Journal of Statistics Education*, **18**(2).

[91] Wild, C. (2006), The concept of distribution, *Statistics Education Research Journal*, **5**(2), 10-26.

[92] Wild, C. and M. Pfannkuch (1999), Statistical thinking in empirical enquiry, *International Statistical Review*, 67, 223-265.

[93] Wild, C., M. Pfannkuch, M. Regan, and N. J. Horton (2011), Towards more accessible conceptions of statistical inference, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A* (Statistics in Society), **174**(2), 247-295.