LA MOYENNE : L'APPROCHE DE CHISINI REVISITEE EXEMPLES ET ENSEIGNEMENTS

Christophe VANDESCHRICK[1]

TITLE

The Mean: the Chisini Approach Revisited: Examples and Lessons

RESUME

Face à un cas concret, il est parfois difficile de choisir la formule adéquate pour le calcul de la moyenne. Ce texte revisite l'approche de Chisini et se base sur une définition unique du concept de moyenne, dont l'application permet d'identifier la formule appropriée aux données à traiter.

Mots-clés : *moyenne, moyenne arithmétique, moyenne géométrique, moyenne harmonique.*

ABSTRACT

With actual data, it is sometimes difficult to choose the adequate formula to calculate the mean. Following de Chisini approach, this text proposes a method based on an unique definition of the concept of mean. The application of this definition permit to identify the suitable formula according to the data to be averaged.

Keywords: *mean, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean.*

1 Introduction

Graziani et Veronese (2009, p. 33) signalent qu'actuellement, il ne semble pas exister un consensus général sur ce qu'est une moyenne. Dès lors, ces auteurs assignent à leur article l'objectif suivant : « … *introducing them (the students) to a more general concept of mean* ». Comme ces auteurs, nous repartirons de l'approche de Chisini qui offre au moins un double avantage (2009, p. 33) : « *First, by discouraging any automatic procedure it makes students understand the substance of the problem for which mean is required. Second, it does not require a preliminary (and necessarily incomplete) list of the different mean formulas.* »

Ce texte, à priori destiné à des formateurs assurant un cours de statistique (descriptive) en début de cursus supérieur, vise à montrer comment un aménagement de la définition de Chisini devrait permettre de supprimer certaines difficultés tant sur le plan conceptuel (pour définir ce qu'est, en définitive, une moyenne) que sur le plan opérationnel (pour déterminer la formule de la moyenne adaptée aux données à traiter).

L'approche de Chisini se place dans un contexte pratique (« *in a practical context* ») (Graziani et Veronese, 2009, p. 33), ce que nous traduisons par le fait qu'il s'agit de calculer

[1] Université catholique de Louvain, Centre de Recherche en Démographie et Institut supérieur de Formation sociale et de Communication (Haute École ICHEC – ISFSC), christophe.vandeschrick@uclouvain.be. Nous reprenons ici, en les approfondissant, des idées déjà exprimées en partie dans 2 publications : Vandeschrick (1999) ; Vandeschrick et Wautelet (2003, pp. 60-76). Vandeschrick L. (2005) a produit une réflexion allant dans le même sens. Merci à C. Munno et à J.-P. Conard pour l'aide apportée à la traduction de textes. Merci à A.-M. Lefin et P. Vandeschrick pour la relecture du manuscrit.

une moyenne sur des données observées, ayant des dimensions, et non pas simplement sur une suite de nombres purs auxquels on déciderait d'appliquer telle ou telle formule de la moyenne. Ce texte se développe dans cette perspective d'analyse de cas concrets.

Le point 2 explicitera la définition de la moyenne suivie dans ce texte. Ensuite, le point 3 l'illustrera à travers des exemples. Le point 4 sera consacré à des enseignements en matière de conceptualisation et d'utilisation de la moyenne. Ainsi, se dégageront une vision claire du concept et un mode d'utilisation rationnel, adaptable à toutes (?) les situations à traiter.

2 La définition du concept de moyenne

Pour un examen, supposons connus les résultats sur 20 des 7 élèves d'une classe : 12, 12, 12, 13, 15, 16 et 18. Sans surprise, la moyenne vaut 14 (formule arithmétique) ; la médiane vaut 13 et le mode est de 12. Les publications de Chisini (1929) et De Finetti (1931) ont marqué une étape importante dans la généralisation du concept de moyenne. Leur réflexion aboutit à une définition du concept tellement générale qu'elle s'apparente plutôt à celle de paramètre de tendance centrale en général. Ainsi, De Finetti (1931, p. 381) cite, comme exemple de moyenne, la médiane. Dans sa généralisation, Herzel (1961) ajoute le mode.

Le présent texte porte uniquement sur la moyenne au sens strict, soit le 1^er^ paramètre calculé dans le 1^er^ paragraphe. Il ne s'agit donc pas de chercher à couvrir aussi d'autres paramètres de tendance centrale. Dans cet objectif, la définition utilisée par Chisini sera en quelque sorte bridée de façon à ne plus concerner que la seule moyenne. À notre avis, cette voie devrait permettre de dégager un consensus général sur ce qu'est une moyenne et sur la façon de déterminer la formule à utiliser selon les données à analyser.

Le point 2.1 portera sur la définition de la moyenne telle que proposée par Chisini et commentée par De Finetti. Le point 2.2 introduira la définition suivie dans ce texte. Dans le point 2.3, une comparaison sera menée entre l'approche de Chisini et la définition suivie ici.

2.1 L'approche de Chisini

Chisini (1929, p. 107) résume ainsi l'apport d'un exemple (traduction de l'auteur) : « *il est clair que la recherche d'une moyenne a pour but de simplifier une quelconque question en substituant, à 2 quantités données ou plus, une quantité unique qui viendra les synthétiser, sans modifier la vision d'ensemble du phénomène considéré. Donc, … cela n'a aucun sens de parler de moyenne de 2 (ou plusieurs) quantités, mais il a y du sens de parler de leur moyenne eu égard à la quantification synthétique d'une autre grandeur qui en dépend.* »

De Finetti (1931) revient sur les propos de Chisini. En p. 370, après avoir repris le 1^er^ exemple utilisé par Chisini, il propose une définition de la moyenne compatible avec celle de Chisini, la différence venant du remplacement de l'expression « la quantification synthétique d'une autre grandeur qui en dépend » par « une condition donnée »[2].

Dans ces 2 définitions (à la base de ce que nous dénommerons « l'approche de Chisini »), il s'agit de substituer à des quantités connues une quantité unique tout en conservant une vision d'ensemble : « une autre grandeur synthétique qui en dépend » ou « une circonstance

[2] Pour sa part, Lévy (1979, p. 67) évoque une notion très proche : « conserver une propriété de l'ensemble ». Pour Antoine (1999, p. 75), il s'agit d'une « loi de composition interne ».

donnée ». Cette caractéristique de la moyenne est dénommée « *invariance requirement* » par Graziani et Veronese (2009, p. 33) et se traduit par l'équation suivante :

$$f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{avec } \bar{x} = \text{la moyenne.} \tag{1}$$

2.2 Définition du concept de moyenne suivie dans ce texte

Ce texte repose sur une définition de la moyenne, certes proche de celle de Chisini, mais aménagée pour la rendre plus efficace tant sur un plan théorique que pratique. Cette définition utilise la notion d'effet de la variable sur les unités sous observation. Cette notion sera précisée dans le point 2.2.1. Ensuite, la définition suivie dans ce texte sera énoncée.

2.2.1 L'effet de la variable sur les unités sous observation

Dans quelles circonstances précises utilise-t-on la moyenne ? Connaissant la valeur d'une variable mesurée pour une série d'unités sous observation, la moyenne servira de paramètre pour résumer la distribution observée. Prenons les exemples du tableau 1. En commençant à dessein par l'exemple 2, 29 femmes âgées de 50 ans et plus ont été interrogées à propos de leur parité (le nombre d'enfant(s) que chacune a mis au monde) ; la moyenne recherchée est la parité moyenne parmi les 29 femmes interrogées. Pour sa part, l'exemple 1 concerne trois opérations de change ; la moyenne recherchée est le taux de change moyen pour les 1 500 € échangés au cours des trois opérations de change.

TABLEAU 1 – *Données pour les 2 premiers exemples*

Exemple 1	Exemple 2
01/01 : 500 € au taux de 1,5 \$/€	6 femmes de parité 0 enfant par femme
01/07 : 250 € au taux de 1,4 \$/€	14 femmes de parité 1 enfant par femme
01/12 : 750 € au taux de 1,3 \$/€	9 femmes de parité 2 enfants par femme

La *variable* est la grandeur dont on cherche la moyenne. Dans l'exemple 1, la variable est donc le taux de change qui s'exprime en dollar(s) par euro (\$/€) et dans l'exemple 2, la parité qui s'exprime en enfant(s) par femme (e/f). Les *unités sous observation* sont les personnes ou les choses pour lesquelles la valeur de la variable est connue, à savoir, dans l'exemple 1, des euros échangés et dans l'exemple 2, des femmes interrogées.

Exemples de lecture des données :

- 3^{e} ligne de l'exemple 2 : « 9 femmes sont observées à raison de 2 enfants par femme » ou « pour 9 unités sous observation, la variable vaut 2 e/f » ;
- 1re ligne de l'exemple 1 : « 500 € sont observés à raison d'un taux de 1,5 \$/€ » ou « pour 500 unités sous observation, la variable vaut 1,5 \$/€ ».

Comment définir l'*effet de la variable sur les unités sous observation* ? Cet effet se définit comme ce que la variable produit par elle-même quand elle s'applique aux unités sous observation. Prenons l'exemple de la 1re opération de change : l'application du taux de 1,5 \$/€ aux 500 € échangés produit 750 \$. Dans ce cas, l'effet de la variable s'obtient via une multiplication : $500 \times 1{,}5 = 750$. Dans l'exemple 2 aussi, l'application de la variable aux 9 femmes de la 3^{e} ligne produit 18 enfants, soit 9×2.

Cet effet se calcule selon la nature de la variable, des unités sous observation et du processus qui les lie : une multiplication pour les 2 exemples (mais il peut s'agir d'autres opérations (*cf. infra*)). Pour les 2 exemples, l'effet de la variable se calcule comme suit :

– pour la 1[re] opération de change : $500\,€ \times 1{,}5\ \$/€ = 750\ \$$;
– pour les femmes de la 3[e] ligne : $9\ \mathrm{f} \times 2\ \mathrm{e/f} = 18\ \mathrm{e}$.

Par ailleurs, point important à notre avis, notons que la cohérence du système dimensionnel assure celle des écritures :

– des € multipliés par \$/€ donnent des \$: $€ \times \$/€ = \$$;
– des femmes multipliées par des enfants par femme donnent des enfants : $\mathrm{f} \times \mathrm{e/f} = \mathrm{e}$.

2.2.2 La définition et son application

Voici la définition de la moyenne suivie dans ce texte :

la moyenne est la valeur de la variable qui, appliquée à toutes les unités sous observation, conserve l'effet global de la variable sur l'ensemble des unités sous observation.

Le concept d'*effet global* de la variable sur l'ensemble des unités sous observation intervient dans la définition. Dans le point précédent, nous avons défini un effet de la variable, mais il s'agissait d'un effet partiel, dans le sens où il ne concernait qu'une partie des unités sous observation. Ainsi, pour la 1[re] opération de change :

$$\text{effet partiel}_1 = 500\,€ \times 1{,}5\,\$/€ = 750\,\$.$$

Cet effet partiel peut aussi s'écrire : $\text{effet partiel}_1 = n_1 x_1$, où n_1 est le nombre d'unités sous observation (500 €) sur lequel agit la 1[re] valeur observée, soit x_1 (1,5 \$/€). Pour l'effet partiel des deux autres opérations de change, l'écriture devient : $n_2 x_2$ et $n_3 x_3$.

Sans surprise, l'effet global sur l'ensemble des 1 500 € échangés au cours des trois opérations s'obtient par une addition définissant le nombre total de \$ obtenus :

$$\text{effet global} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \sum_{p=1}^{3} n_p x_p\,. \tag{2}$$

L'application de la définition de la moyenne implique de remplacer, dans l'équation (2), les valeurs observées de la variable par la moyenne tout en conservant l'effet global :

$$\text{effet global} = \sum_{p=1}^{3} n_p x_p = \sum_{p=1}^{3} n_p \bar{x}.$$

Par comparaison avec l'équation (1), la dernière formule précise la forme exacte de la fonction à employer vu la nature des données à traiter et leur contexte. Dès lors, il suffit de déduire la formule du calcul de la moyenne[3] : si l'on définit $n = n_1 + n_2 + n_3$,

$$\sum_{p=1}^{3} n_p x_p = \sum_{p=1}^{3} n_p \bar{x} = n\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{3} n_p x_p.$$

Si P désigne le nombre de lignes dans la distribution, la formule se généralise ainsi :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{P} n_p x_p\,. \tag{3}$$

[3] Ce résultat peut aussi être établi via l'inverse de la fonction (*cf.* Chisini (1929), p. 108 ou Graziani et Veronese (2009), p. 34).

Une formule équivalente, mais utilisant les fréquences, peut aussi être établie :

$$\bar{x} = \sum_{p=1}^{P} f_p x_p \,, \quad \text{où} \quad f_p = \frac{n_p}{n} \,. \tag{4}$$

En (3), on reconnaitra la formule arithmétique dite pondérée par les effectifs (absolus, soit les n_p) et en (4), la formule dite pondérée par les fréquences (relatives, soit les f_p). Appliquée aux 2 exemples, la formule (3) donne les résultats suivants :

- $\bar{x} = \frac{(500 \times 1{,}5)+(250 \times 1{,}4)+(750 \times 1{,}3)}{500+250+750} = \frac{2\,075}{1\,500} = 1{,}38333$, soit un taux moyen de 1,38333 \$/€ ;
- $\bar{x} = \frac{(6 \times 0)+(14 \times 1)+(9 \times 2)}{6+14+9} = \frac{32}{29} = 1{,}10345$, soit une parité moyenne de 1,10345 e/f.

La moyenne correspond en fait à la fiction mathématique de la répartition égalitaire de l'effet global entre les unités sous observation : à toutes les unités sous observation, la même part de l'effet global. Par ailleurs, elle s'exprime dans les mêmes dimensions que la variable (soit en $/€ et e/f). Enfin, la moyenne est une valeur de la variable soit observée (*cf.* formule 14), soit observable (comme 1,38333 $/€) ou même non observable (comme 1,10345 e/f).

Le caractère fictionnel de la moyenne autorise sans problème la production d'un résultat vide de sens au niveau individuel : aucune femme ne pourra jamais déclarer avoir 1,10345 enfant(s). Il n'empêche que ce nombre correspond à la parité qu'aurait dû avoir chacune des 29 femmes pour qu'il y ait 32 enfants au total.

Vu l'importance de l'effet global dans la méthode suivie dans ce texte, cette dernière sera désignée par l'expression « méthode de l'effet global », par opposition à l'approche de Chisini. Par ailleurs, à la suite d'Antoine (1998, p. 14), l'expression « opération 'moyenne' » désignera le processus d'identification de la formule et son utilisation.

Telle que définie, cette opération 'moyenne' relève de la statistique univariée : une seule variable est observée pour différentes unités sous observation, comme, par exemple, la parité observée pour les 29 femmes de l'exemple 2. Dans la définition de la moyenne, l'effet global suppose bien qu'une seule variable soit en jeu : « l'effet global de LA variable sur l'ensemble des unités sous observation ». Cet effet global est défini de manière univoque sans devoir prendre en compte une quelconque autre considération.

2.3 L'approche de Chisini versus la méthode de l'effet global

Les définitions de la moyenne à la base de l'approche de Chisini et de la méthode de l'effet global sont très proches : il s'agit toujours de substituer à des quantités connues une quantité unique tout en conservant une/la vision d'ensemble. En fait, seule l'expression de la grandeur à maintenir constante se modifie :

- « une autre grandeur synthétique qui en dépend » pour Chisini ou « une circonstance donnée » pour De Finetti (*cf.* point 2.1) ;
- « l'effet global de la variable sur l'ensemble des unités sous observation ».

Pour l'approche de Chisini, la vision d'ensemble à conserver est laissée au choix : constance « d'une autre grandeur » sans précision, alors que la méthode de l'effet global la définit de manière univoque : selon l'équation (1), la fonction du membre de droite exprime l'effet global au départ des valeurs observées. Cette différence dans la définition[4] n'est pas sans effet sur les conditions que doit ou devrait respecter la moyenne (point 2.3.1) et le choix de la formule à utiliser (point 2.3.2).

2.3.1 Les conditions de la valeur constante et d'internalité

La définition de la moyenne suivie dans ce texte caractérise pleinement ce concept. Son application à tout cas concret permet de déterminer la formule adéquate par rapport aux données à traiter. En suivant, par exemple, Dodd (1940, p. 163) ou Antoine (1998, pp. 73-75), la moyenne doit ou devrait respecter deux critères (pour reprendre l'expression d'Antoine) :

- la condition de la valeur constante : la moyenne d'observations de valeur constante est cette constante ;
- la condition d'internalité : la moyenne est située entre la valeur observée la plus basse et la plus élevée.

À propos de la condition de la valeur constante, Graziani et Veronese (2009 p. 33) signalent qu'il s'agit « *the only necessary condition, widely shared on referred to as consistency property* ». Nous la retiendrons donc. Par contre, il y a débat sur la condition d'internalité. Qu'en penser ?

Par exemple, en suivant l'approche de Chisini et via un exemple à propos de la loi des cosinus (appelée aussi théorème d'Al-Kashi, ou théorème de Pythagore généralisé), De Finetti (1931, p. 378) veut montrer que la moyenne ne respecte pas nécessairement la condition d'internalité. Si x et y désignent la longueur des 2 côtés formant un des angles d'un triangle d'ouverture α, la loi des cosinus permet de calculer la longueur de z, côté opposé à α (équation (5)) :

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha. \tag{5}$$

Selon la procédure suivie par De Finetti, la moyenne recherchée est la longueur identique que devraient avoir les 2 côtés x et y formant l'angle α pour conserver la valeur de z ainsi que l'ouverture de cet angle α. On obtient :

$$\text{moyenne}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha}. \tag{6}$$

Supposons que x, y et α valent respectivement 1 centimètre (cm), 1,5 cm et 10°. La loi des cosinus impose une valeur de 0,5437 pour le côté z. Selon la procédure de De Finetti, la moyenne de x et y vaut 3,1190, soit une valeur supérieure à celle du côté le plus grand. Peut-on considérer que cet exemple infirme la condition d'internalité ? Oui, si l'on suit l'approche de Chisini : une circonstance (définie par la valeur du côté z et de l'angle α) est maintenue inchangée en remplaçant la valeur initiale des côtés x et y par une valeur constante. Par contre, il est bien difficile d'établir un parallèle avec la méthode de l'effet global.

Selon la méthode de l'effet global, la longueur moyenne de ces 2 cotés est obtenue via une formule arithmétique, soit 1,25 cm. En effet, appliquer la longueur (qui joue le rôle de variable dont on cherche la moyenne) sur le côté mesurant 1,5 cm produit un développement

[4] La même situation se produit pour les définitions faisant appel à la notion floue de « total » ou de « dimension globale de l'ensemble ». Voir, par exemple, Moyenne. Wikipédia ; Moyenne.Techno-Science.Net ; Moyenne. Statistiques ou Statistiques de groupe et analyse des questions de votre épreuve (PowerPoint). Il en va de même pour la notion employée par Lévy (1979, p. 67) : « conserver une propriété de l'ensemble ».

rectiligne de cette valeur. Le développement rectiligne cumulé des deux côtés (les deux unités sous observation), soit l'effet global, est obtenu par addition des longueurs, ce qui suppose d'utiliser la formule arithmétique.

Dans la procédure de De Finetti, la circonstance à maintenir constante est en rapport avec la loi des cosinus et dépend donc, comme l'effet global, des valeurs de la variable dont on cherche la moyenne (la longueur de x et y), mais aussi, à la différence de l'effet global, d'une autre quantité, à savoir l'ouverture de l'angle α. Loin de considérer l'effet que la variable produit par elle-même sur les unités sous observation, l'exemple de De Finetti n'est donc, à notre avis, pas approprié pour juger de la validité ou pas d'une caractéristique de la moyenne telle que définie dans ce texte.

Par ailleurs, la procédure de De Finetti ne respecte pas la condition de la valeur constante. Par exemple, si deux côtés mesurent 2 cm, le résultat obtenu ne vaudra 2 que dans le cas où l'angle formé par les deux côtés vaut 60°. Pour toute autre valeur de l'angle, la procédure donne un résultat soit inférieur, soit supérieur à 2, ne respectant pas la condition de la valeur constante. Il s'agit d'un argument supplémentaire pour ne pas suivre De Finetti quand il conclut que la condition d'internalité de la moyenne n'est pas recevable.

Graziani et Veronese (2009, pp. 33-34) citent un autre exemple de moyenne externe utilisant une formule quadratique (soit, le même exemple que De Finetti si l'angle α vaut 90°). Sur la base de leurs résultats en prenant comme valeurs observées -3 et $+1$, les auteurs concluent que : « *thus one of the mean values (namely* $+\sqrt{5}$*) is greater than the max(*x_1, x_2*), showing that the Chisini mean might also be external to the interval of the observations*. » Si la démonstration purement mathématique est convaincante, par contre, sans l'apport d'un exemple concret d'observations reprenant une valeur positive et une autre négative et nécessitant l'emploi de la formule quadratique pour le calcul de la moyenne, il est impossible de se prononcer sur la validité de la conclusion.

À notre avis, l'exemple de De Finetti ainsi que celui de Graziani et Veronese ne donnent pas d'argument recevable pour rejeter la condition d'internalité. Et donc, à ce stade, nous continuerons à considérer que les deux conditions (la valeur constante et l'internalité) restent d'application, notamment pour la moyenne telle que définie ici.

2.3.2 Identification de la formule du calcul de la moyenne

Face à un cas concret, selon la méthode de l'effet global, aucun choix ne doit être opéré : la définition de l'effet global à maintenir constant est univoque, ce qui implique l'identification automatique de la bonne formule. Au contraire, dans l'approche de Chisini, vu le caractère flou de la grandeur qui doit être conservée, l'utilisateur devra commencer par la définir. En définitive, la « moyenne » obtenue dépendra d'un choix arbitraire.

Notons que la méthode de l'effet global (mieux que l'approche de Chisini) offre un avantage pédagogique intéressant : le calcul de la moyenne ne se résume pas à choisir une formule dans un catalogue préétabli, mais suppose l'application d'une méthode nécessitant une réflexion non seulement sur la nature des données, mais aussi à propos du contexte dans lequel elles interviennent.

3 D'autres exemples, d'autres formules

3.1 Le taux de change et la formule harmonique

L'exemple 1 du tableau 1 concerne trois opérations de change, convertissant des euros en dollars. L'exemple examiné ici va concerner aussi des opérations de change, mais dans le sens inverse : conversion de dollars en euros, tout en conservant les taux de change de l'exemple 1 (taux en \$/€). Si le 01/01 (01/07 ; 01/12), 1 000 \$ (1 200 ; 825) ont été échangés en € au taux de 1,5 \$/€ (1,4 ; 1,3), que vaut le taux de change moyen pour les 3 025 \$ échangés ?

À ce stade, il pourrait être tentant d'inverser le taux de change, ce qui nous ramènerait *de facto* à une situation comparable à celle de l'exemple 1. Même si cette solution est acceptable, gardons les taux de change dans leur forme initiale (des \$/€). Application de la méthode :

– la variable et les unités sous observation sont le taux de change (\$/€) et les \$ changés ;
– l'effet de la variable pour la 1re opération s'écrit :

$$n_1 \times \frac{1}{x_1} = 1\ 000\ \$ \times \frac{1}{1{,}5\ \$/€} = 666{,}7\ € \,;$$

– le système dimensionnel est cohérent : $\$ \times 1/(\$/€)$ donnent des € ;
– l'effet global, la formule de la moyenne et sa généralisation s'écrivent comme suit :

$$\text{effet global} = \sum_{p=1}^{3}\left(\frac{n_p}{x_p}\right) = \sum_{p=1}^{3}\left(\frac{n_p}{\bar{x}}\right) \Rightarrow \bar{x} = \frac{n}{\sum_{p=1}^{3}\left(\frac{n_p}{x_p}\right)} \quad \text{et} \quad \bar{x} = \frac{n}{\sum_{p=1}^{P}\left(\frac{n_p}{x_p}\right)}. \qquad (7) \text{ et } (8)$$

Il s'agit en définitive d'une formule harmonique dite pondérée par les effectifs.

– la formule (7) appliquée à l'exemple donne :

$$\bar{x} = \frac{1\ 000 + 1\ 200 + 825}{\frac{1\ 000}{1{,}5} + \frac{1\ 200}{1{,}4} + \frac{825}{1{,}3}} = 1{,}40148\ \$/€.$$

En inversant les données initiales (les taux de change exprimés en €/\$), on pourrait utiliser une formule arithmétique, ce qui supposerait d'inverser le résultat de ce calcul pour produire le résultat voulu. La formule harmonique opère cette double inversion (*cf.* annexe 2).

3.2 Les 3 taux de croissance de la démographie

La démographie utilise des taux de croissance de trois formes différentes selon la nature de l'hypothèse portant sur l'évolution de la population : exponentielle, géométrique ou linéaire. Nous supposerons l'observation d'une population sur t années. Pop_0 désigne la population au moment 0, soit au début de la 1re année d'observation ; Pop_1 celle en début de l'année 2, soit au moment 1 ; etc. D'une manière générale, Pop_i désigne la population au moment i, avec i variant de 0 à t. Le taux de croissance de l'année i (entre les moments $i-1$ et i) est désigné par r_i, avec i variant de 1 à t. Dans ce contexte, la moyenne recherchée sera le taux moyen au cours des t années. La variable est le taux de croissance et les unités sous observation, les années pour lesquelles le taux est connu.

Chacune des hypothèses d'évolution de la population donne lieu au calcul d'un taux spécifique (1re ligne du tableau 2). L'effet de la variable sur une année d'observation (ou effet individuel car ne concernant qu'une seule année) est explicité en 2e ligne. Il s'agit à chaque fois du facteur par lequel il faut multiplier la population au temps $i-1$ pour obtenir la population au temps i ; ce facteur est dénommé « coefficient multiplicateur ».

TABLEAU 2 – *Taux de croissance selon 3 hypothèses d'évolution*

Evolution…	***… exponentielle***	***… géométrique***	***… linéaire***
1. Valeur du taux	$r_i = \ln\left(\frac{\mathrm{Pop}_i}{\mathrm{Pop}_{i-1}}\right)$ (9)	$r_i = \frac{\mathrm{Pop}_i}{\mathrm{Pop}_{i-1}} - 1$	$r_i = \frac{\mathrm{Pop}_i - \mathrm{Pop}_{i-1}}{0{,}5 \times (\mathrm{Pop}_{i-1} + \mathrm{Pop}_i)}$
2. Effet individuel	$\mathrm{EI} = e^{r_i}$	$\mathrm{EI} = 1 + r_i$	$\mathrm{EI} = \frac{2 + r_i}{2 - r_i}$
3. Effet global	$\mathrm{EG} = e^{\sum_i r_i}$ (10)	$\mathrm{EG} = \prod_i (1 + r_i)$	$\mathrm{EG} = \prod_i \left(\frac{2 + r_i}{2 - r_i}\right)$
4. Formule	$\bar{r} = \frac{1}{t} \sum_i r_i$	$\bar{r} = \sqrt[t]{\prod_i (1 + r_i)} - 1$ (11)	$\bar{r} = 2\left(\frac{\sqrt[t]{\prod_i \left(\frac{2 + r_i}{2 - r_i}\right)} - 1}{\sqrt[t]{\prod_i \left(\frac{2 + r_i}{2 - r_i}\right)} + 1}\right)$ (12)

Au départ des effets individuels, l'effet global (3e ligne du tableau) est obtenu via une addition pour la 1re hypothèse et via un produit pour les 2 autres hypothèses. Finalement, la 4e ligne du tableau indique la formule de la moyenne adaptée aux 3 hypothèses. Pour la 1re, il s'agit d'une formule arithmétique et pour les deux autres, de formules de la famille géométrique, mais sans être de pure souche. La moyenne du coefficient multiplicateur en cas d'hypothèse géométrique ($\mathrm{CM}_i = 1 + r_i$) s'obtient via une formule géométrique de pure souche :

$$\overline{\mathrm{CM}} = \sqrt[t]{\prod_i \mathrm{CM}_i} \quad \text{ou} \quad \overline{\mathrm{CM}} = \sqrt[t]{\frac{\mathrm{Pop}_t}{\mathrm{Pop}_0}}. \qquad \text{(13a et b)}$$

Le calcul du coefficient multiplicateur est immédiat via la formule (13b), quand l'effet global s'obtient par le rapport entre les populations initiale et finale. Dès lors, le taux moyen peut s'obtenir plus facilement que via l'application de la formule (11).

À propos des dimensions des trois taux : on peut démontrer que, pour la 1re et la 3e hypothèses, le taux de croissance s'exprime en inverse du temps et, pour la 2e, en un nombre pur exposant l'inverse du temps (*cf.* annexe 3).

4 Les dividendes de la méthode de l'effet global

À notre estime, la méthode de l'effet global présente des avantages, notamment sur le plan pédagogique. Certains de ces avantages sont cités dans Graziani et Veronese à propos de l'approche de Chisini. Selon les cas, nous les approfondissons.

4.1 Définition et mode de calcul : à chacun son rôle

La distinction entre la définition et le mode de calcul de la moyenne n'est pas toujours bien établie. À titre d'exemple, Py (2007a, p. 86) : « *La moyenne d'une série statistique est égale au rapport de la somme des valeurs observées par le nombre d'observations* ». Il ne nous semble pas souhaitable qu'une formule serve à la fois de définition d'un concept et de mode de calcul. En appliquant la méthode de l'effet global (mais aussi l'approche de Chisini), la distinction entre la définition du concept et son mode de calcul s'impose d'elle-même :

- la définition indique les caractéristiques du paramètre à calculer ;
- la formule se déduit par application de la définition aux données utilisées.

En procédant de la sorte, la moyenne est mise sur pied d'égalité avec d'autres concepts statistiques, comme la médiane (*cf.* par exemple, Grais, 1994, pp. 110-116). Par ailleurs, la méthode de l'effet global montre qu'il existe une seule définition de la moyenne, qui permet de déterminer la formule du calcul de la moyenne adaptée aux données concernées. En définitive, à une définition unique correspond une infinité théorique de formules.

Conséquence : à notre avis, il est impropre de parler de « moyenne arithmétique », « moyenne harmonique », « moyenne géométrique »... Ces expressions laissent accroire l'existence de plusieurs concepts différents. Or, il n'en est rien : la définition de la moyenne est unique. Par contre, il est licite de parler de « formules arithmétique, harmonique, géométrique… de la moyenne ». L'adjectif ici est justifié : pour atteindre la valeur de la moyenne, il existe différentes formules adaptées aux circonstances.

Du point de vue pédagogique, la confusion entretenue entre la définition du concept et son mode de calcul nous semble préjudiciable. À l'inverse, la méthode de l'effet global explique bien les tenants et aboutissants de l'opération 'moyenne'.

4.2 Les conditions de Yule

Les 6 « conditions de Yule » constituent un grand classique quand il s'agit de définir les qualités que devraient avoir les paramètres servant à décrire les séries statistiques (*cf.* par exemple Py, 2007, p. 71). A notre avis, deux de ces conditions sont mieux remplies en utilisant la méthode de l'effet global :

- *Définition objective* : avec la méthode de l'effet global (mieux qu'avec l'approche de Chisini), l'utilisateur s'engage dans une voie bien tracée par une définition précise. Il n'a aucun choix à opérer : la méthode le guide pas à pas, sur la base d'un raisonnement, vers la formule adaptée aux données à traiter.
- *Signification concrète* : la méthode de l'effet global fixe de manière univoque la signification du résultat produit. Son interprétation ne peut plus porter à confusion, critique parfois évoquée, comme par exemple par Antoine (1998, pp. 121-122). Dans cet exemple, les deux moyennes calculées correspondent à des questions différentes et donc à des résultats différents[5] : le nombre moyen d'enfants par famille ou la fratrie moyenne dans laquelle vivent les enfants. La méthode de l'effet global (mieux que celle de Chisini) permet de dépasser aisément ce type de difficulté.

[5] *Cf.*, par exemple, Preston (1976), Lévy *et al.* (1981, p. 47) ou Toulemon (2001).

4.3 Toutes pondérées, les formules de la moyenne !

Dans tous les exemples traités ici, le poids affectant une valeur indique le nombre absolu ou le pourcentage d'unités sous observation pour lequel cette valeur est d'application. Dans l'exemple 1 du tableau 1, le taux de change 1,5 $/€ est d'application pour 500 € ou un tiers des 1 500 unités sous observation. C'est le seul type de pondération qui est envisagé ici. Ceci posé, prenons un exemple où généralement la solution vient d'une formule dite non pondérée : 5 femmes de 50 ans et plus ont été interrogées à propos de leur parité. Voici leurs réponses : 3, 4, 0, 1 et 2. La parité moyenne parmi ces 5 femmes s'établit comme suit :

$$\bar{x} = \frac{(1 \times 3) + (1 \times 4) + (1 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 2)}{5} = 2 \quad \text{et} \quad \bar{x} = \frac{\mathrm{f} \times (\mathrm{e}/\mathrm{f})}{\mathrm{f}} = \mathrm{e}/\mathrm{f}\,. \qquad \text{(14a et b)}$$

Application de la formule (3), la formule (14a) est pondérée : toutes les valeurs ont un poids unitaire. Au moment du calcul, ce poids peut être négligé car il ne change rien sur le plan numérique, ce qui équivaudrait à utiliser une « formule arithmétique non pondérée ». Par contre, en analyse dimensionnelle (équation 14b), ce « 1 » ne peut être passé sous silence, à moins de considérer que la moyenne s'exprime dans les dimensions suivantes :

$$\bar{x} = \frac{\mathrm{e}/\mathrm{f}}{\mathrm{f}} = \mathrm{e}/\mathrm{f}^2\,. \qquad (15)$$

Ce résultat serait en contradiction avec l'idée que la moyenne et les valeurs de la variable s'expriment dans les mêmes dimensions. En définitive, une formule dite non pondérée est une formule pondérée où la valeur des poids n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat correct sur un plan purement numérique. Le plus souvent, cette situation se produit quand tous les poids sont unitaires (*cf.*, par exemple, Lévy *et al.*, 1981, p. 42). Dans ce texte, nous avons résolument opté pour l'idée selon laquelle toutes les formules sont pondérées. C'est la raison de la présence des expressions « dite pondérée » ou « dite non pondérée ». Cet aspect précis des choses ne doit pas nécessairement être considéré comme un sous-produit de la méthode de l'effet global ou de l'approche de Chisini, mais plutôt comme issu d'un souci constant d'assurer la cohérence du système dimensionnel des équations. Toutefois, à notre avis, la méthode de l'effet global encourage, voire oblige, la prise en compte de cette indispensable cohérence du système dimensionnel.

4.4 Des règles d'utilisation des formules versus la méthode de l'effet global

Après avoir établi une liste de formules de calcul de la moyenne, certains manuels proposent des règles pour déterminer laquelle employer face à un cas concret. Que valent ces règles quand elles sont confrontées à la méthode de l'effet global ? Voici 2 exemples.

Le 1$^{\text{er}}$ concerne la vitesse moyenne. Antoine (1998, p. 108) termine le calcul d'une vitesse moyenne avec la règle suivante : « *toute vitesse moyenne est moyenne harmonique de vitesses* ». Quand la vitesse moyenne est calculée au départ de vitesses connues pour des distances parcourues, la méthode de l'effet global débouche sur une formule harmonique. Par contre, si la vitesse moyenne est calculée au départ de vitesses connues pour des temps de parcours, c'est bien une formule arithmétique qui s'impose (situation similaire aux exemples des taux de change connus soit pour des €, soit pour des $). Pour accepter la règle d'Antoine, il faut procéder au calcul des distances si la vitesse est connue pour des temps de parcours. Mais pourquoi ne pas procéder au calcul des temps de parcours si les vitesses et les distances parcourues sont connues, ce qui amènerait toujours le recours à la formule arithmétique ? Le mieux est sans doute d'abandonner cette règle au profit de la méthode de l'effet global[6].

Le 2e exemple concerne la formule géométrique. Après avoir parlé de cas où la formule arithmétique s'impose vu que les variables s'expriment en dollars, personnes ou semaines de chômage, Lewis (2012, pp. 100-102) précise le champ d'application de la formule géométrique : « *However, some economic activity is described by variables defined as rates of change, indices, or ratios. Because such variables have different mathematical properties, we must use a different formula, the geometric mean, to calculate the average value.* »

L'argument justifiant l'emploi de formules géométriques concerne les propriétés mathématiques des variables en cause[7]. La méthode de l'effet global montre que le choix de la formule ne se fait pas uniquement sur la base de ces caractéristiques, mais aussi sur celles de l'effet de la variable sur les unités sous observation. Ne prendre en compte que les caractéristiques de la variable ne peut amener aucune conclusion fiable pour le choix de la formule. Par ailleurs, nous avons montré qu'aucun des 3 taux de croissance en démographie (qui devraient rentrer dans la catégorie des variables visée par Lewis) ne suppose le recours à une formule géométrique (*cf.* point 3.2). Cette 2e règle nous semble donc inappropriée[8].

L'approche de Chisini remplace avantageusement les règles par un raisonnement (Graziani et Veronese (2009), p. 34). À notre avis, la méthode de l'effet global renforce cet avantage. C'est d'autant plus heureux que nous avons montré le caractère inopérant, voire même carrément nocif, de certaines règles parfois proposées.

5 Conclusions

Dans les manuels de statistique, bien souvent, la moyenne ne bénéficie que de peu d'attention. Des exemples : dans Vessereau (1996, p.17) : « *Tout le monde sait calculer la moyenne d'une série de chiffres* » ou dans Howell (2002, p.40) : « *La moyenne est la mesure la plus commune de tendance centrale ; elle nécessite peu d'explications* ». Il est vrai que la nature des données (souvent une caractéristique connue pour des individus) combinée avec la nature des processus en jeu (souvent, l'effet global est obtenu par addition des effets partiels ou individuels, obtenus eux-mêmes le plus souvent en multipliant chaque valeur de la variable par le nombre d'individus pour lesquels elle est d'application) entraine le recours massif à la formule arithmétique de la moyenne.

En dépit de cette forte dominante arithmétique, la question du choix de la formule du calcul de la moyenne ne peut être éludée. Et dans cet objectif, la méthode de l'effet global représente une voie intéressante. Cette méthode repose sur la définition suivante :

---

6 Pour d'autres exemples de règles discutables et/ou imprécises à propos de l'utilisation de la formule harmonique, *cf.* Py (2007a, p. 108), Lann and Falk (2006, p.323) ou Justens (1990, p. 115).

7 Pour une idée semblable, *cf.* Moyenne, Wikipédia : « *Il y a plusieurs façons de calculer une moyenne d'un ensemble de valeurs, choisies en fonction de la grandeur physique que représentent ces nombres* ».

8 Pour d'autres exemples similaires, *cf.* Spiegel (1984, p. 60, exercice 37) ou Braverman (1978, p. 96). Vandeschrick et Wautelet (2003, pp. 74-76) ont montré qu'une seule et même variable (la descendance) peut, selon les circonstances, entrainer le recours à une formule arithmétique, harmonique ou géométrique ! Par ailleurs, notons que la démonstration de Lewis est entachée d'inexactitudes dans les résultats des calculs.

la moyenne est la valeur de la variable qui, appliquée à toutes les unités sous observation, conserve l'effet global de la variable sur l'ensemble des unités sous observation.

Cette définition s'inspire de la définition de Chisini. Toutefois, la définition adoptée dans ce texte est plus précise que cette dernière dans le sens où la grandeur à conserver est définie de manière univoque. L'opérationnalisation de cette définition permet de déterminer la formule adaptée aux données concrètes à traiter. Pour ce faire, il revient à l'utilisateur :

- d'identifier la variable et les unités sous observation ;
- d'établir le calcul de l'effet global de la variable sur les unités sous observation ;
- par application de la définition, de remplacer dans la formule de l'effet global, les valeurs observées par la moyenne à calculer ;
- de traiter l'équation obtenue pour déterminer la formule adéquate vu le contexte.

À notre avis, la méthode de l'effet global procure certains avantages :

- cette méthode établit une distinction claire entre la définition du concept et son mode de calcul : l'application de cette définition unique débouche sur une multitude de formules. En conséquence, les adjectifs « arithmétique, géométrique… » ne doivent pas porter sur le terme « moyenne », mais bien sur le mot « formule » ;
- sur le plan pédagogique, cette méthode offre l'avantage d'obliger l'utilisateur à une réflexion structurée sur les données et leur nature afin de déterminer la formule donnant un résultat en cohérence avec ces dernières ;
- la méthode rend inutiles des règles d'utilisation des différentes formules ;
- cette approche améliore le score de la moyenne par rapport à certains critères de Yule.

Sans que ce soit un apport spécifique de la méthode de l'effet global en tant que tel, nous avons pu montrer l'intérêt de l'analyse de la cohérence du système dimensionnel, avec le souci d'assurer la validité des écritures. Ce souci devrait toujours être présent lors de l'utilisation d'équations sur des données concrètes.

Ce texte concerne la moyenne au sens strict, sans chercher aussi à couvrir d'autres paramètres de tendance centrale. Graziani et Veronese (2009, p. 36) reprochent justement à l'approche de Chisini de ne pas permettre l'identification du mode et de la médiane, par exemple. À ce sujet, ils citent la généralisation proposée par Herzel[9] (1961). Ce reproche vaut aussi pour la méthode exposée ici. Toutefois, nous pensons qu'il est préférable, notamment dans un cours de base, de réserver le mot « moyenne » à un usage précis, aussi précis que pour les concepts de « mode » ou « médiane », par exemple. Pour ce faire, il convient d'adopter une définition resserrée[10] pour la moyenne, aussi spécifique que les définitions du mode et de la médiane. La méthode de l'effet global repose sur une telle définition.

---

[9] La généralisation d'Herzel repose sur l'identification d'une fonction à minimiser, ce qui ne peut se faire, nous semble-t-il, sans connaitre au préalable la formule précise du calcul du paramètre concerné. Spécifiquement, à propos des moyennes, la méthode d'Herzel ne résout pas la question du choix de la formule adéquate par rapport aux données à traiter. Ainsi, dans les 3 exemples du point 3.2, à elle seule, la généralisation d'Herzel ne permet pas de choisir la formule de la moyenne à appliquer. Par contre, une fois ces formules identifiées via la méthode de l'effet global, rien n'empêche de leur appliquer la généralisation d'Herzel.

[10] L'approche de Chisini combinée avec la généralisation d'Herzel confère à la moyenne un fort « pouvoir absorbant » : les moyennes comprennent aussi bien… les moyennes que la médiane (parfois dénommée « moyenne milieu » (Moyennes. Cours gratuits de Mathématique)), le mode, mais encore la valeur identique que doivent prendre 2 côtés d'un triangle pour conserver la longueur du 3^{e} ainsi que l'angle qu'ils forment (De Finetti (1931, p. 378)) ou la vitesse constante à appliquer à deux parties du trajet d'un train (les distances A-B et B-C, parcourues initialement à des vitesses différentes) de façon à ce que l'horaire de passage au point

Par la suite, quand les concepts sont bien établis, il pourrait être utile de proposer une approche généralisée, comme fait par Herzel. Toutefois, dans ce type de généralisation, pourquoi ne pas privilégier un vocable du type « paramètre de tendance centrale » comme terme générique en remplacement du mot « moyenne », à réserver à un usage spécifique ?

En définitive, en substituant l'effet global (défini de manière univoque) à l'imprécis « *une grandeur qui en dépend* » de l'approche de Chisini, la méthode suivie dans ce texte ne répond-elle pas de façon satisfaisante aux objectifs de Graziani et Veronese (2009, p. 33) : dégager un consensus général sur le concept de moyenne et remplacer une procédure automatique d'application de la formule arithmétique de la moyenne par une réflexion sur la nature exacte des données à traiter ?

Références

[1] Antoine, C. (1998), *Les moyennes*, Presses Universitaires de France, Paris.

[2] Braverman, J. (1978), *Fundamentals of Business Statistics*, Academic Press, New York.

[3] Calot, G. (1984), *Cours de statistique descriptive*, Dunod, Paris.

[4] Chisini, O. (1929), Sul concetto di media, *Periodico di Matematiche*, 4, 106-116.

[5] Dodd, E. (1940), The Substitutive Mean and Certain Subclasses of this General Mean, *The Annals of Mathematical Statistics*, **11**(2), 163-176.

[6] De Finetti, B. (1931), Sul concetto di media, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **2**(3), 369-396.

[7] Grais, B. (1994), *Techniques statistiques, I. Statistique Descriptive*, Dunod, Paris.

[8] Graziani, R. & Veronese P. (2009), How to Compute a Mean ? The Chisini Approach and Its Applications, *The American Statistician*, **63**(1), 33-36, DOI: 10.1198/tast.2009.0006 *(http://dx.doi.org/10.1198/tast.2009.0006)*.

[9] Herzel, A. (1961), Sulla definizione dei concetti di media e di interpolazione, *Metron*, 21, 126-138.

[10] Howell, D. C. (2002), *Méthodes statistiques en sciences humaines. 4e tirage*, De Boeck Université, Bruxelles.

[11] Justens, D. (1990), *Statistiques pour décideurs. 2e édition*, De Boeck, Bruxelles.

[12] Lann A. and Falk R. (2006), Tell Me the Method, I'll Give You the Mean, *The American Statistician*, **60**(4), 322-327.

[13] Lévy, M. L. (1979), *Comprendre les statistiques*, Éditions du Seuil, Paris.

[14] Lévy, M. L., S. Ewenczyk, et R. Jammes (1981), *Comprendre l'information économique et sociale*, Hatier, Paris.

---

intermédiaire (B) ne soit pas changé et que l'horaire au point initial et terminal soit changé le moins possible (Herzel (1961, p. 128))... Il faut reconnaitre que ce double emploi du mot « moyenne » (comme terme générique, mais aussi comme catégorie spécifique du terme générique) ne simplifie pas la question de savoir ce qu'est véritablement une moyenne. Par ailleurs, les 2 derniers exemples correspondent-ils à l'idée de rechercher une valeur résumant une collection de valeurs d'une variable observée pour différents individus ou bien s'agit-il de régler des questions sans rapport avec la moyenne au sens strict ?

[15] Lewis, M. (2012), *Applied Statistics for Economists*, Routledge, Londres et New York.

[16] Moyennes. Cours gratuits de Mathématique, *http://mathematique.coursgratuits.net/statistique/.*

[17] Moyenne. Statistiques, *http://www.statelem.com/moyenne.php*.

[18] Moyenne.Techno-Science.Net, *http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=6000*.

[19] Moyenne. Wikipédia*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Moyenne* .

[20] Preston, S. (1976), Family sizes of children and family sizes of women, *Demography*, **13**(1), 105-114.

[21] Py, B. (2007), *Statistique descriptive. Nouvelle méthode pour bien comprendre et réussir. 5e édition*, Economica, Paris.

[22] Spiegel, M. (1984), *Théorie et applications de la statistique. 14e édition (série Schaum)*, McGraw-Hill, Auckland.

[23] Statistiques de groupe et analyse des questions de votre épreuve (PowerPoint), *http://smart.ulg.ac.be/wp-content/uploads/smart-ulg_fiche-statistiques-correction.pdf* .

[24] Toulemon, L. (2001), Combien d'enfants, combien de frères et sœurs depuis cent ans ?, *Population & Sociétés*, 374, 1-4.

[25] Vandeschrick C. (1999), La moyenne : concept unique ou multiple ?, *Document de travail du SPED,* n°5, Louvain-la-Neuve.

[26] Vandeschrick, C. et J.-M. Wautelet (2003), *De la statistique descriptive aux mesures des inégalités (Collection Population et développement, n° 11)*, Academia-Bruylant/L'Harmattan, Louvain-la-Neuve/PARIS.

[27] Vandeschrick, L. (2005), *La moyenne : un concept unique, différentes façons de la calculer (3e Régendat Mathématique. Travail de fin d'études. 2004-2005)*, Haute École Francisco Ferrer, Bruxelles.

[28] Vessereau A. (1996), *La statistique (Collection Que sais-je ?,* n°281*)*, Presses Universitaires de France, Paris.

Annexe 1. De Finetti et l'internalité, d'autres valeurs chiffrées

En prenant un angle de 30°, avec x et y valant 1 et 1,5 cm, la procédure de De Finetti (équation (6)) donne 1,5598 cm (*cf.* tableau 3). Si α vaut 33,557° (sans changer les longueurs de x et y), le résultat vaut 1,5000, soit précisément la longueur du côté le plus grand. Pour des angles supérieurs à 33,557°, le résultat est compris entre les longueurs initiales de x et y.

TABLEAU 3 – *Moyenne selon la loi des cosinus : exemples*

x = 1 cm et y = 1,5 cm	**x = 1 cm et y = 2 cm**
α = 10° ⇒ moyenne = 3,1190	α = 10° ⇒ moyenne = 5,9086
α = 30° ⇒ moyenne = 1,5598	α = 40° ⇒ moyenne = 2,0340
α = 33,557° ⇒ moyenne = 1,5000	α = 41,409° ⇒ moyenne = 2,0000
α = 170° ⇒ moyenne = 1,2502	α = 170° ⇒ moyenne = 1,5006
x = 1 cm et y = 3 cm	**x = 1 cm et y = 5 cm**
α = 48,189° ⇒ moyenne = 3,0000	α = 53,130° ⇒ moyenne = 5,0000
x = 1 cm et y = 10 cm	**x = 1 cm et y = 100 cm**
α = 56,633° ⇒ moyenne = 10,0000	α = 59,669° ⇒ moyenne = 100,0000

En changeant le rapport entre les valeurs initiales de x et y (voir le tableau 3), l'angle en deçà duquel la procédure de De Finetti donne un résultat plus grand que le plus grand des côtés varie : pour $x = 1$ et $y = 2$ (respectivement 3, 5, 10 et 100), cette limite vaut 41,409° (48,189°, 53,130°, 56,632° et 59,668°) : plus le rapport entre le côté le plus court et le plus long augmente, plus la valeur de l'angle séparant les résultats internes et externes augmente.

Annexe 2. Tout réduire à la seule formule arithmétique : une fausse bonne idée

Il est toujours possible de calculer une moyenne avec la formule arithmétique (pour une présentation plus élaborée de cette propriété de la moyenne, *cf.* notamment Moyenne. Wikipédia, Cas général, site consulté en date du 24-12-2015). En exemples, prenons successivement les formules géométrique et harmonique.

Formule géométrique[11]

Pour la population d'une ville, supposons connu le coefficient multiplicateur de trois années successives, à savoir : 1,10 ; 1,20 et 1,05. Le coefficient multiplicateur moyen vaudra (formule (13)) :

$$\bar{x} = \sqrt[3]{1{,}10 \times 1{,}20 \times 1{,}05} = 1{,}11495.$$

En supposant n observations individuelles, la formule peut se transformer comme suit :

$$\text{effet global} = \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} \bar{x} = \bar{x}^n \Rightarrow \ln(\bar{x}^n) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \Rightarrow \ln(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

[11] *Cf.* par exemple Calot (1984), p. 57 ou Lewis (2012), pp. 100-101.

Le logarithme de la moyenne est donc égal à la moyenne des logarithmes calculée selon une formule arithmétique. Une fois le logarithme de la moyenne connu, il faut opérer la transformation inverse pour obtenir la moyenne recherchée : $e^{\ln(\bar{x})} = \bar{x}$.

Dès lors :

$$\ln(\bar{x}) = \frac{\ln(1{,}10) + \ln(1{,}20) + \ln(1{,}05)}{3} = \frac{0{,}32642}{3} = 0{,}10881 \Rightarrow \bar{x} = e^{0{,}10881} = 1{,}11495.$$

Ce résultat est équivalent à celui du calcul en utilisant la formule géométrique. Signalons toutefois que, pour procéder de la sorte, il faut :

- identifier la formule à employer avec les données initiales, soit le produit des x_i ;
- calculer le logarithme des données ;
- utiliser la formule arithmétique sur les logarithmes ;
- ne pas oublier de transformer le résultat pour le remettre au format initial.

On l'aura compris, il faut passer par l'étape de l'identification de l'effet global. Dès lors pourquoi se priver de la formule géométrique qui, quelque part, opère en toute discrétion la double et circulaire transformation des données en logarithmes et vice-versa ?

Formule harmonique (équations (7) et (8))

Dans ce cas, il faut passer par l'inverse de la variable. Reprenons l'exemple du point 3.1. La variable s'exprime en \$/€ et son inverse, en €/\$. De manière précise, les 1 000 \$ de la 1re opération ont été changés à un taux de 1,5 \$/€. En prenant la variable inversée, cela devient : les 1 000 \$ ont été observés pour un taux de 0,66667 €/\$. L'effet partiel de la variable inversée sur les 1 000 \$ de la 1re opération de change se calcule comme suit :

$$\text{effet partiel} = 1\,000\ \$ \times 0{,}66667\,€/\$ = 666{,}67\,€,$$

où $0{,}66667\,€/\$$ est l'inverse de la valeur de la variable lors du 1er change, soit $(x_1)^{-1}$.

Cet effet partiel s'exprime bien en €, résultant de la multiplication de \$ par €/\$. L'effet global (nombre total d'€) s'obtient par addition des effets partiels, ce qui donne une expression de même nature que l'équation (2), mais avec emploi de l'inverse de la variable :

$$\sum_{p=1}^{P} n_p (\bar{x})^{-1} = \sum_{p=1}^{P} n_p \left(x_p\right)^{-1} \Rightarrow (\bar{x})^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{P} n_p \left(x_p\right)^{-1}.$$

Par traitement de cette équation, on obtient la formule de la moyenne adaptée au fait que l'on recourt à l'inverse de la variable. En conséquence, la formule adéquate est arithmétique, et non plus harmonique.

La moyenne inversée, soit $(\bar{x})^{-1}$, vaut donc :

$$(\bar{x})^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{P} n_p \left(x_p\right)^{-1} = \frac{(1\,000 \times 0{,}66667) + (1\,200 \times 0{,}71429) + (825 \times 0{,}76923)}{1\,000 + 1\,200 + 825}$$
$$= 0{,}72927\,\frac{€}{\$}.$$

Il faut procéder à une nouvelle inversion pour que le résultat se présente au format des données initiales :

$$\bar{x} = \frac{1}{0{,}72927\ \frac{€}{\$}} = 1{,}40148\frac{\$}{€},$$

soit le résultat déjà obtenu au point 3.1.

Finalement, la formule harmonique opère en toute discrétion la double inversion.

Les deux exemples illustrent bien que la formule arithmétique peut se substituer à d'autres formules, mais cette méthode suppose une débauche d'efforts qui inclut l'identification de l'effet global. Dès lors, on peut s'interroger sur l'utilité de ce détour par la formule arithmétique, notamment dans des cas plus compliqués comme, par exemple, celui du taux de croissance moyen selon l'hypothèse linéaire (point 3.2).

Annexe 3. Dimensions de 3 taux de croissance de la démographie

Dans un 1^er^ temps, on pourrait penser que le taux selon la 1^re^ hypothèse est un nombre pur, ce que l'équation du calcul du taux de l'année i (9) pourrait laisser accroire. En repartant de la formule de l'effet global (10), on peut démontrer qu'il s'agit bien de l'inverse du temps :

$$\mathrm{EG} = e^{\sum_i r_i} = e^{\sum_i \bar{r}} = e^{\bar{r}t} = \frac{\mathrm{Pop}_t}{\mathrm{Pop}_0} \Rightarrow \bar{r} = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathrm{Pop}_t}{\mathrm{Pop}_0}\right).$$

Le numérateur est un nombre pur et le dénominateur s'exprime en années. Le taux moyen s'exprime donc en inverse du temps, ainsi que le taux de croissance d'une année quelconque. Notons que, dans l'équation (9), la division par 1 an a été supprimée car sans effet numérique sur le résultat. Par contre en termes d'unités de mesure, la cohérence de cette équation ne peut être assurée que par la présence de cette division par 1 an.

Pour la 2^e^ hypothèse, l'unité de mesure est un nombre pur exposant l'inverse du temps :

$$\mathrm{EG} = \prod_i (1 + r_i) = \frac{\mathrm{Pop}_t}{\mathrm{Pop}_0} = \prod_i (1 + \bar{r}) \Rightarrow \bar{r} = \sqrt[t]{\frac{\mathrm{Pop}_t}{\mathrm{Pop}_0}} - 1.$$

Dans cette écriture, le rapport sous la racine est un nombre pur. Le degré de la racine s'exprime en années et donc les dimensions de ce calcul sont un nombre pur exposant l'inverse du temps. Il en va de même pour le « 1 » (sinon il serait illicite d'opérer la soustraction) et du taux moyen ainsi que tous les taux annuels calculés sous la 2^e^ hypothèse.

Dans le cas de la 3^e^ hypothèse, le taux se calcule en divisant l'augmentation de la population (exprimée en individus) par le temps vécu entre le début et la fin de l'année (exprimé en individus × années). Ce temps vécu est calculé en multipliant la moyenne de la population entre le début et la fin de l'année (entre crochets dans la formule) par 1 an :

$$r_i = \frac{\mathrm{Pop}_i - \mathrm{Pop}_{i-1}}{\left[0{,}5 \times \left(\mathrm{Pop}_{i-1} + \mathrm{Pop}_i\right)\right] \times 1\ \mathrm{an}}.$$

En définitive, ce taux s'exprime en inverse du temps puisque le numérateur s'exprime en individus et le dénominateur en individus × années. Ce constat pourrait aussi être établi en partant de l'équation (12), où il est possible de démontrer que le 2 s'exprime en inverse du temps.